Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 1

МАТЕМАТИКА

Б. М. ГАГАЕВ

К СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 XI 1947)

Гарди—Литтльвуду [1] принадлежит признак сходимости тригонометрических рядов Фурье несколько иной природы, чем прочие признаки сходимости. На основании известного принципа локализации в признаках сходимости в точке x, кроме общего предположения интегрируемости по Лебегу, налагаются лишь условия на значения функции в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки. В признаке же Гарди—Литтльвуда делается предположение одновременно как относительно поведения функции в окрестности рассматриваемой точки, так и относительно порядка убывания коэффициентов ряда. Но убывание коэффициентов зависит от поведения функции на всем отрезке ортогональности. Естественно, что знание поведения функции на всем отрезке позволяет уменьшить требования, налагаемые на поведение ее в окрестности рассматриваемой точки.

Признак Гарди—Литтльвуда состоит в следующем.

Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке $\bar{x}$ к $f(\bar{x})$, если выполняются следующие два условия: 1) $f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})=o(\ln 1/|h|)^{-1}$; 2) коэффициенты ряда равны $O(n^{-\delta})$ $(\delta>0)$.

Признак Гарди—Литтльвуда можно обобщить так, чтобы связь между требованиями, налагаемыми на порядок убывания коэффициентов (следовательно, на поведение функции на всем отрезке) и на поведение функции в окрестности рассматриваемой точки, стала очевидной.

Обобщенный признак Гарди—Литтльвуда. *Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке $\bar{x}$ к значению $\Omega(\bar{x})=1/2\,(f(\bar{x}+0)+f(\bar{x}-0))$, если выполняются следующие два условия: 1) $f(\bar{x}+h)-f(\bar{x}-h)-2\Omega(\bar{x})=o(\varphi(|h|))$; 2) коэффициенты ряда a_n и b_n равны $O(\psi(1/n)$, где $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ такие две монотонно неубывающие функции, стремящиеся при $\alpha\to 0$ к нулю, что интеграл*

$$\int\limits_{1/n}^{\omega(n)} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt < A,$$

где $\omega(n)$ — монотонно невозрастающая функция, стремящаяся при $n\to\infty$ к нулю, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{n\to\infty} n\omega(n)=\infty$, а A не зависит от n, ряд же

$$\frac{1}{\omega(n)}\cdot{\sum_{k=1}^{\infty}}'\frac{\psi(1/k)}{|n-k|}$$

сходится и сумма его стремится к 0 при $n\to\infty$. Знак ' обозначает, что под знаком суммы опущен член с $k=n$. Если для точек некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$ функция $\varphi(|h|)$ одна и та же, то ряд сходится равномерно в точках каждого интервала, лежащего внутри $[\alpha, \beta]$.

Доказательство аналогично доказательству признака Гарди — Литтльвуда. Известно, что если

$$s_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

то

$$s_n(x)-\frac{1}{2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)-\Omega(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2\Omega(x)]\frac{\sin nt}{\operatorname{tg}(t/2)}\,dt.$$

За точку x всегда можно взять точку $x=0$. Следовательно, достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F(t)\frac{\sin nt}{\operatorname{tg}(t/2)}\,dt=0 \tag{1}$$

где $F(t)={}^1/_2(f(t)+f(-t)-2\Omega(0))$. Очевидно $F(t)$ — четная функция. Если $f(x)$ при $x=0$ удовлетворяет условию 1), то $F(x)$ непрерывна, в точке $x=0$ равна нулю и удовлетворяет условию $|F(t)|=o(\varphi(|t|))$.

Для доказательства разобьем интеграл (1) на сумму трех интегралов

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{1/n}F(t)\frac{\sin nt}{\operatorname{tg}(t/2)}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\omega(n)}F(t)\frac{\sin nt}{\operatorname{tg}(t/2)}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\omega(n)}^{\pi}F(t)\frac{\sin nt}{\operatorname{tg}(t/2)}\,dt. \tag{2}$$

Так как на отрезке $[0, \pi/n]$ $\sin nt\leqslant nt\leqslant 2n\operatorname{tg}(t/2)$, то первый интеграл выражения (2) по модулю не больше $2\varepsilon/\pi$, где ε — максимум $|F(t)|$ на отрезке $[0, 1/n]$, т. е. этот интеграл с увеличением n стремится к нулю.

Пусть $\alpha(t)$ — максимум выражения $|F(t)|/\varphi(t)$ на отрезке $[0, t]$. Тогда, так как на отрезке $[0, \pi/2]$ $t\leqslant\operatorname{tg}t$, то

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\omega(n)}F(t)\frac{\sin nt}{\operatorname{tg}(t/2)}\,dt\right|\leqslant 2\alpha[\omega(n)]\int_{1/n}^{\omega(n)}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt.$$

Следовательно, и второй интеграл выражения (2) с увеличением n стремится к нулю.

Очевидно, ряд Фурье $F(t)$ будет $\frac{1}{2}a_0-\Omega(0)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt$.

Но ряд Фурье всегда можно умножить на функцию с ограниченным изменением и почленно проинтегрировать. Следовательно, третий интеграл выражения (2) равен

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}a_0-\Omega(0)\right]\int_{\omega(n)}^{\pi}\frac{\sin nt}{\operatorname{tg}(t/2)}\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{\omega(n)}^{\pi}\frac{\sin nt\cos kt}{\operatorname{tg}(t/2)}\,dt.$$

Применяя вторую теорему о среднем значении, легко получаем, что и третий интеграл выражения (2) по модулю не больше

$$\frac{2}{\pi\omega(n)}\left[\frac{|a_0/2-\Omega(0)|}{n}+2\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\psi(1/k)}{|n-k|}+\frac{\psi(1/n)}{n}\right]. \tag{3}$$

Следовательно, и третий интеграл выражения (2) при $n\to\infty$ стремится к нулю, а потому

$$\lim_{n\to 0} s_n(0)=\Omega(0).$$

Из доказательства следует, что если для точек какого-либо отрезка $[\alpha, \beta]$ функция $\varphi(h)$ одна и та же, то тригонометрический ряд сходится равномерно в точках каждого интервала, лежащего внутри $[\alpha, \beta]$.

Если положить

$$\psi\left(\frac{1}{n}\right)=n^{-\delta},\quad 0<\delta,\quad \varphi(|h|)=\left[\ln\frac{1}{|h|}\right]^{-1},$$

то получим признак Гарди—Литтльвуда. За функцию $\omega(n)$ нужно в этом случае взять $n^{-\delta/2}$.

Но можно и иначе выбрать $\psi(1/n)$ и $\varphi(h)$. Например, можно взять за $\varphi(|h|)$ для достаточно малых h функцию

$$\left[\ln_m\frac{1}{|h|}\right]^{-1}, \tag{4}$$

где $\ln_m\frac{1}{|h|}=\ln\ln_{m-1}\frac{1}{|h|}$, h считаем достаточно малым, если выражение (4) положительно. В этом случае для достаточно большого n за функцию $\psi(1/n)$ берем

$$n\ln n\ln_2 n\ldots\ln_{m-1} n]^{-1},$$

n считаем достаточно большим, если это выражение положительно. Пусть N таково, что $n>N$ удовлетворяет этому условию. За функцию $\omega(n)$ можно взять $\ln_{m-1} n/n$.

Действительно, если $\ln_m n>0$,

$$\left|\int\limits_{1/n}^{\ln_{m-1} n/n}\frac{dt}{t\ln_m t}\right|<\frac{1}{\ln_m n}\int\limits_{1/n}^{\ln_{m-1} n/n}\frac{dt}{t}=\frac{\ln_m n}{\ln_m n}=1.$$

В этом случае вместо ряда (3) следует рассмотреть ряд

$$\frac{2}{\pi\omega(n)}\left[\frac{[\frac{1}{2}a_0-\Omega(0)]}{n}+2\sum_{k=1}^{N}\frac{|a_k|}{|n-k|}+\sum_{k=N+1}^{\infty}{}'\frac{\psi(1/k)}{|n-k|}+\frac{\psi(1/n)}{n}\right].$$

Для доказательства стремления этого выражения с увеличением n к нулю достаточно доказать стремление к нулю суммы

$$\frac{1}{\omega(n)}\sum_{k=N+1}^{\infty}{}'\frac{\psi(1/k)}{|n-k|}=\frac{n}{\ln_{m-1} n}\sum_{k=N+1}^{\infty}{}'\frac{1}{|n-k|\,k\ln k\ldots\ln_{m-1} k}.$$

Возьмем $n > 2N+2$ и разобьем этот ряд на три ряда:

$$\frac{n}{\ln_{m-1} n} \sum_{k=N+1}^{[n/2]} + \frac{n}{\ln_{m-1} n} \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} + \frac{n}{\ln_{m-1} n} \sum_{k=n+1}^{\infty}, \tag{5}$$

где $[n/2]$ означает наибольшее целое число, не превышающее $n/2$. Первая сумма не превышает

$$\frac{2n}{n \ln_{m-1} n} \left[\ln_m \left[\frac{n}{2} \right] - \ln N \right],$$

т. е. стремится с увеличением n к нулю. Вторая сумма выражения (5) не превышает

$$\frac{2}{\ln_{m-1} n} \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \ln k \ldots \ln_{m-1} k} =$$

$$= \frac{2}{\ln_{m-1} n} \sum_{k=[n/2]+1}^{n-N-1} + \frac{2}{\ln_{m-1} n} \sum_{k=n-N}^{n-1}.$$

Вторая из этих сумм, очевидно, стремится к нулю, первая же не превышает

$$\frac{2}{\ln_{m-1} n} \left[\ln_m \left[\frac{n-1}{2} \right] - \ln_m N \right],$$

т. е. стремится к нулю.

Третью сумму выражения (5) также разобьем на две суммы

$$\frac{n}{\ln_{m-1} n} \sum_{k=n+1}^{2n} + \frac{n}{\ln_{m-1} n} \sum_{k=2n+1}^{\infty}. \tag{6}$$

Первая сумма (6) не превышает

$$\frac{1}{\ln_m n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(k-n) \ln k \ldots \ln_{m-1} k} = \frac{1}{\ln_{m-1} n} \sum_{k=n+1}^{n+N} + \frac{1}{\ln_{m-1} n} \sum_{k=n+N+1}^{2n}.$$

Первая из этих сумм, очевидно, стремится к нулю, вторая же не превышает

$$\frac{1}{\ln_{m-1} n} \sum_{s=N+1}^{n} \frac{1}{s \ln s \ldots \ln_{m-1} s} < \frac{\ln_m n - \ln_m N}{\ln_{m-1} n},$$

т. е. тоже стремится к нулю. Нетрудно доказать стремление к нулю и второй суммы выражения (6). Она не превышает

$$\frac{n}{\ln_{m-1} n} \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{s^2} < \frac{1}{\ln_{m-1} n},$$

т. е. также стремится к нулю.

Следовательно, выбранные выражения $\varphi(1/|h|)$ и $\psi(1/n)$ удовлетворяют условиям теоремы.

Поступило
1 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, J. London Math. Soc., 7, 252 (1932); Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 3, 43 (1932); А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, стр. 40—41.