Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 9

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. А. ВАЙНШТЕЙН

ОБ ОТРАЖЕНИИ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ В ТРУБЕ ОТ ОТКРЫТОГО КОНЦА

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 10 IX 1947)

Звуковые колебания в трубах, открытых с одного конца, были теоретически исследованы еще Гельмгольцем [1] и Рэлеем [2]. Трудность этой задачи связана с необходимостью учета дифракционного эффекта на отверстии трубы, так как волна, распространяющаяся в трубе по направлению к открытому концу, излучает отражаясь часть своей энергии в пространство. Для облегчения анализа указанными авторами были сделаны некоторые искусственные допущения (в частности, предполагалось, что труба оканчивается бесконечным плоским фланцем), не соответствующие действительности и ставящие под сомнение количественную применимость полученных ими результатов в обычных случаях. Оказывается, однако, что дифракционные задачи такого типа могут быть решены вполне строго. При этом вычисляется, в частности, и (комплексный) коэффициент отражения от открытого конца.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z и будем считать, что бесконечно тонкая стенка трубы находится при $r=a$, $z>0$ (полубесконечная труба). Беря зависимость от времени в форме $e^{-i\omega t}$ и ограничиваясь волнами, симметричными относительно φ, мы должны интегрировать волновое уравнение для потенциала скоростей Φ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+k^2\Phi=0 \tag{1}$$

($k=\omega/c$, c — скорость звука) при граничном условии

$$\partial\Phi/\partial r=0 \quad \text{при} \quad r=a, \quad z>0. \tag{2}$$

Уравнение (1) допускает такое частное решение:

$$\Phi(r,\ z,\ w)=i2\pi^2 aF(w)\,e^{iwz}\,v\begin{Bmatrix} J_0(vr)\,H_0'(va)\\ H_0(vr)\,J_0'(va)\end{Bmatrix}. \tag{3}$$

Здесь J_0 и $H_0=H_0^{(1)}$ — функции Бесселя и Ханкеля; в фигурной скобке верхнюю строку следует брать при $r<a$, а нижнюю при $r>a$, и

$$v=\sqrt{k^2-w^2},\ \operatorname{Im} v>0. \tag{4}$$

Из (3) следует, что

$$\Phi(a+0,\ z,\ w)-\Phi(a-0,\ z,\ w)=4\pi F(w)\,e^{iwz}, \tag{5}$$

а $\partial\Phi/\partial r$ при $r=a$ непрерывна. Будем искать такую суперпозицию частных решений (3)

$$\Phi(r,z)=\int_C \Phi(r,z,w)\,dw, \tag{6}$$

где C есть некоторый контур в плоскости комплексного переменного w, чтобы: 1) функция $\Phi(r,z)$ была непрерывна при $r=a$, $z<0$; 2) удовлетворялось условие (2). Требование 1 приводит к такому соотношению для искомой функции (Fw):

$$\int_C e^{iwz}F(w)\,dw=0 \quad \text{при } z<0, \tag{7}$$

а требование 2 дает

$$\int_C e^{iwz}v\Psi(w)\,F(w)dw=0 \quad \text{при } z>0, \tag{8}$$

где

$$\Psi(w)=\pi va\,H_1(va)\,J_1(va). \tag{9}$$

Будем считать сначала $\operatorname{Im} k>0$. Тогда разрезы функции $\Psi(w)$ в силу (4) расположены, как показано на рисунке, и на них находятся корни уравнения $v\Psi(w)=0$ ($w_0=kw_1$, $w_2,\ldots$ на разрезе $k\to i\infty$ и $-w_0=-k$, $-w_1, -w_2,\ldots$ на разрезе $-k\to-i\infty$), дающие волновые числа волн, могущих существовать внутри бесконечной трубы. Если внутри трубы на открытый конец набегает „основная“ волна с волновым числом $-k$, то для Φ внутри трубы можно написать

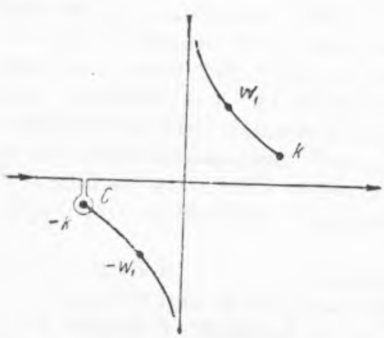

Рис. 1

$$\Phi(r,z)=Ae^{-ikz}+\widehat{\Phi}(r,z), \tag{10}$$

где первое слагаемое при $z\to+\infty$ неограниченно возрастает (так как $\operatorname{Im} k>0$), а второе слагаемое, представляющее действие конца трубы на набегающую волну (первое слагаемое), при $z\to+\infty$ стремится к нулю и может быть разложено в интеграл Фурье. Поэтому следует выбрать контур C так, как показано на рисунке.

Определение $F(w)$ из функциональных уравнений (7) и (8) сводится (ср. [3] или [4]) к разбиению функции $\Psi(w)$ в полосе $-k_1\leqslant \operatorname{Im} w\leqslant k_1$ ($k_1<\operatorname{Im} k$), где она голоморфна,

$$\Psi(w)=\Psi_1(w)\,\Psi_2(w) \tag{11}$$

на множители Ψ_1 и Ψ_2 такие, что $\Psi_1(w)$ голоморфна и не имеет нулей при $\operatorname{Im} w\geqslant -k_1$, а $\Psi_2(w)$ обладает теми же свойствами при $\operatorname{Im} w\leqslant k_1$. Так как $\Psi(w)\to 1$ при $|w|\to\infty$, то Ψ_1 и Ψ_2 определяются формулами

$$\ln\Psi_1(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-ik_1-\infty}^{-ik_1+\infty}\frac{\ln\Psi(w)\,dw}{w-u},\quad \ln\Psi_2(u)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{ik_1-\infty}^{ik_1+\infty}\frac{\ln\Psi(w)\,dw}{w-u}, \tag{12}$$

причем

$$\Psi_1(u)=\Psi_2(-u). \tag{13}$$

Дифференцируя по u, деформируя путь интегрирования для Ψ_2 наверх так, чтобы он охватил разрез $k \to i\infty$, используя соотношение обхода для функции Ханкеля и вычисляя вычеты, получим:

$$\frac{d \ln \Psi_2(u)}{du} = \frac{1}{2(u-k)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{u - w_m} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{w_{m-1}}^{w_m} \frac{d\Omega(va)}{dw} \frac{dw}{w-u} \right\}, \tag{14}$$

где интеграл берется по нижней стороне разреза ($v > 0$) и

$$\Omega(x) = \arg H_1(x) = \operatorname{arctg} \frac{N_1(x)}{J_1(x)} \tag{15}$$

есть непрерывно изменяющаяся фаза функции Ханкеля. Интегрированием по частям преобразуем (14) к виду

$$\frac{d \ln \Psi_2(u)}{du} = \frac{1}{2(u-k)} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{du} \int\limits_{w_{m-1}}^{w_m} \frac{\omega(va)\, dw}{w-u}, \tag{16}$$

где

$$\omega(x) = \operatorname{arctg}\left[-\frac{J_1(x)}{N_1(x)}\right], \quad 0 \leqslant \omega(x) \leqslant \pi \tag{17}$$

есть функция, терпящая разрыв в точках, где $J_1(x) = 0$. Интегрируя (16) и используя (11) и (13), получаем

$$\Psi_1(w) = \sqrt{\pi a (k+w) H_1(va) J_1(va)}\, e^{1/2\, M(w)};$$

$$\Psi_2(w) = \sqrt{\pi a (k-w) H_1(va) J_1(va)}\, e^{-1/2\, M(w)}, \tag{18}$$

где

$$M(u) = \frac{2}{\pi} u \int\limits_{k}^{i\infty} \frac{\omega(va)\, dw}{u^2 - w^2}, \tag{19}$$

причем интегрирование производится по нижней стороне разреза $k \to i\infty$. Зная Ψ_1 и Ψ_2, можно написать решение уравнений (7) и (8) в виде:

$$F(w) = \frac{B}{(w+k)\sqrt{k-w}\, \Psi_2(w)} = \frac{1}{v\Psi(w)} \frac{B\Psi_1(w)}{\sqrt{k+w}}; \tag{20}$$

тогда функция $F(w)$ будет голоморфна выше C (включая C) и убывать здесь при $|w| \to \infty$ как $1/w\sqrt{w}$, а функция $v\Psi(w) F(w)$ будет голоморфна ниже C (включая C) и убывать здесь при $|w| \to \infty$ как $1/\sqrt{w}$, и уравнения (7) и (8) удовлетворятся. Постоянная B в (20) пропорциональна постоянной A в (10).

Полученное выражение Φ при $r < a$, $z > 0$ имеет вид (10); $\widehat{\Phi}$ распадается на сумму волн, бегущих в направлении положительных z; при $ka < 3{,}832$ все эти волны быстро затухают, за исключением волны с волновым числом k и амплитудой ARe^{ikz}, где R — коэффициент отражения основной волны — равен

$$R = -|R|\, e^{i\theta} = -e^{M(k)}. \tag{21}$$

В этом окончательном выражении можно перейти к пределу $\operatorname{Im} k = 0$. Для абсолютной величины $|R|$ коэффициента отражения имеем

$$|R| = e^{ReM(k)}, \quad ReM(k) = -\frac{2}{\pi}\, ka \int_0^{ka} \frac{\omega\left(\sqrt{k^2a^2 - y^2}\right) dy}{k^2a^2 - y^2}. \tag{22}$$

Знание ее позволяет вычислить декремент затухания колебаний трубы с открытым концом. При $ka \ll 1$ можно считать $\omega(x) \approx \pi x^2/4$ и $ReM(k) \approx -\frac{1}{2}(ka)^2$. Для фазы θ коэффициента отражения имеем:

$$\theta = \operatorname{Im} M(k) = \frac{2}{\pi}\, k\alpha \int_0^{\infty} \frac{\omega\left(\sqrt{k^2a^2 + y^2}\right) dy}{k^2a^2 + y^2}. \tag{23}$$

Она определяет положение узлов и пучностей внутри трубы, в частности, смещение пучностей давления на расстояние α по направлению к концу; α есть „поправка на открытый конец", определяющая собственные частоты цилиндрических резонаторов, открытых с одного конца. При этом

$$2k\alpha = \theta. \tag{24}$$

При $ka \ll 1$ из (23) получаем

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega(x)\, dx}{x^2} = 0{,}613; \tag{25}$$

при вычислении интеграла мы пользовались таблицами функции $\Omega(x)$ (15), приведенными у Ватсона ([5]). Теоретическое значение (25) для отношения α/a близко к числу 0,60, которое дают более новые опыты ([6–7]), и значительно ниже значений 0,785 и 0,82, полученных теоретически в старых работах ([1], [2]), предполагающих наличие фланца.

Полученные выше формулы дают возможность вычислить R при любых ka, а также характеристику излучения из открытого конца.

Идея примененного здесь метода заключается в сведении задачи к интегральному уравнению для плотности обобщенного потенциала двойного слоя, расположенного на поверхности, совпадающей с (бесконечно тонкой) стенкой. Интегральное уравнение, получающееся для полубесконечной трубы, принадлежит к типу, хорошо изученному в литературе (теория его дана Винером и Хопфом ([4]) и с более общей точки зрения — Фоком ([3])) и решается в квадратурах. Введенная выше функция $F(w)$ есть в сущности компонента Фурье плотности двойного слоя (ср. формулу (5)), а уравнение (8) эквивалентно упомянутому интегральному уравнению. Аналогичным путем можно получить решение других задач.

Поступило
10 IX 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Helmholtz, Wiss. Abhandl., 1, 366 (1882). [2] И. Рэлей, Теория звука, 2, 1944, стр. 183 и 469. [3] В. А. Фок, Матем. сб., 14, 1 (1944). [4] N. Wiener und E. Hopf, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Berlin, 1931. [5] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1945. [6] S. A. Higgs and L. C. Tyte, Phil. Mag., 4, 1099 (1927). [7] P. Wirz, Helv. Phys. Acta, 20, 1 (1947).