Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

Н. Г. ТУГАНОВ

О БАЗИСНЫХ ЛИНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 11 IX 1947)

Мы несколько расширим определение аффинно-базисных линий поверхности. Под обобщенной аффинно-базисной линией на поверхности мы будем понимать линию, вдоль которой касательные к заданному семейству линий на поверхности параллельны одной и той же плоскости, присоединенной к данной линии. Если проектирующее семейство линий совпадает с семейством асимптотических, мы получим ранее определенные нами аффинно-базисные линии поверхности ([1]). Результаты, полученные в этой статье, относятся к аффинно-базисным линиям, понимаемым в обобщенном смысле слова.

1. Уравнение аффинно-базисных линий поверхности в асимптотических параметрах. Если отнести поверхность к асимптотическим параметрам, то дифференциальное уравнение аффинно-базисных линий ее имеет вид:

$$v'' + av'^3 + bv'^2 + cv' + \partial = 0,$$

где

$$a = \frac{1}{M}\left[F\lambda_{vv} - 3D\lambda\lambda_v + F_v\lambda_v + \frac{D^2}{F}\lambda^3 - D_v\lambda^2 + \right.$$
$$\left. + \left(F_{vv} - D_u - \frac{F_v^2}{F}\right)\lambda - HF^2\right],$$

$$b = \frac{1}{M}\left[F\lambda\lambda_{vv} + 2F\lambda_{uv} - 2F\lambda_v^2 - 3D\lambda\lambda_u - 2F_v\lambda\lambda_v + F_v\lambda_u - 2F_u\lambda_v + \right.$$
$$+ \left(2D\frac{F_v}{F} + D_v\right)\lambda^3 + \left(F_{vv} - 3D_u + 3D\frac{F_u}{F} - 2\frac{F_v^2}{F}\right)\lambda^2 -$$
$$\left. - \left(\frac{F_uF_v}{F} + \frac{AD}{F} + HF^2\right)\lambda + 2A_v - A\frac{F_v}{F}\right],$$

$$c = \frac{1}{M}\left[F\lambda_{uu} + 2F\lambda\lambda_{uv} - 4F\lambda_u\lambda_v - 2F_v\lambda\lambda_u + F_u\lambda\lambda_v - 2F_u\lambda_u - 3A\lambda_v + \right.$$
$$+ \left(D\frac{F_u}{F} - 2D_u\right)\lambda^3 + \left(\frac{AD}{F} + \frac{F_uF_v}{F} + HF^2\right)\lambda^2 +$$
$$\left. + \left(3A_v - 3A\frac{F_v}{F} + \frac{2F_u^2}{F} - F_{uu}\right)\lambda + A_u - 2A\frac{F_u}{F}\right],$$

$$\partial = \frac{1}{M}\Big[F\lambda\lambda_{uu} - 2F\lambda_u^2 + F_u\lambda\lambda_u - 3A\lambda_u + HF^2\lambda^3 +$$

$$+\left(\frac{F_u^2}{F} + A_v - F_{uu}\right)\lambda^2 + A_u\lambda - \frac{A^2}{F}\Big],$$

$$M = F\lambda\lambda_v - F\lambda_u - D\lambda^3 + F_v\lambda^2 + F_u\lambda - A.$$

Здесь A, B, F, H — термины аффинной теории поверхностей ([2]); функция $\lambda = \lambda(u;\ v)$ определяет проектирующее семейство линий

$$v' = \lambda(u;\ v).$$

Конечное уравнение указанного класса линий в асимптотических параметрах выражается

$$(\bar{e};\ \bar{r}_u + \lambda\bar{r}_v) = 0,$$

где e — произвольный постоянный вектор.

2. Условие того, что асимптотические одного семейства входят в состав аффинно-базисных линий. Если асимптотические $v = \text{const}$ являются аффинно-базисными линиями, то уравнение для определения λ имеет вид:

$$F\lambda\lambda_{uu} - 2F\lambda_{uu}^2 + F_u\lambda\lambda_u - 3A\lambda_u + HF^2\lambda^3 +$$

$$+\left(\frac{F_u^2}{F} - F_{uu} + A_v\right)\lambda^2 + A_u\lambda - \frac{A^2}{F} = 0;$$

по форме — это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно λ, в качестве произвольных постоянных будут входить две произвольных функции аргумента v.

Если асимптотические $u = \text{const}$ суть аффинно-базисные линии, то

$$F\lambda_{vv} - 3D\lambda\lambda_v + F_v\lambda_v + \frac{D^2}{F}\lambda^3 - D_v\lambda^2 + \left(F_{vv} - \frac{F_v^2}{F} - D_u\right)\lambda - HF^2 = 0.$$

3. Огибающая соприкасающихся плоскостей семейства аффинно-базисных линий в точке. Примем триедр, образованный в точке $M(u;v)$ поверхности касательными к асимптотическим линиям и аффинной нормалью, за координатный. Уравнение соприкасающейся плоскости аффинно-базисной линии идущей в точке M в направлении v', будет

$$2Fv'^2\xi - 2Fv'\eta +$$

$$+\zeta\left[-\left(\frac{D}{F} + a\right)v'^3 + \left(\frac{F_v}{F} - b\right)v'^2 - \left(\frac{F_u}{F} + c\right)v' + \left(\frac{A}{F} - \partial\right)\right] = 0.$$

Соприкасающиеся плоскости семейства аффинно-базисных линий в точке огибают конус 3-го класса.

Стационарные направления для этого конуса определяются из уравнения

$$v'^3 = \frac{A - F\partial}{D - Fa}.$$

В частности, стационарные направления могут совпадать с направлениями Segre, характеристическое условие для этого

$$Aa + D\partial = 0.$$

4. Три стационарных плоскости пересекаются по прямой

$$\frac{\xi}{\frac{F_v}{F}-b}=\frac{\eta}{\frac{F_u}{F}+c}=\frac{\zeta}{-2F}.$$

В частности, если ось стационарных плоскостей находится в плоскости, определяемой векторами $\bar{r}_u, \bar{\mathfrak{y}}$, где $\bar{\mathfrak{y}}$ — орт аффинной нормали поверхности, то $c=-\partial \ln F/\partial u$; если ось в плоскости $\bar{r}_v, \bar{\mathfrak{y}}$, то $b=\partial \ln F/\partial v$; наконец, если ось совпадает с аффинной нормалью, то одновременно: $b=\partial \ln F/\partial v$, $c=-\partial \ln F/\partial u$.

Отсюда следует: если ось стационарных плоскостей в каждой точке совпадает с аффинной нормалью поверхности, то конгруенция их сопряжена относительно поверхности.

5. Условие того, что в состав аффинно-базисных линий входит сопряженная сеть. Если в состав аффинно-базисных линий поверхности входит сопряженная сеть, имеет место система

$$v''+av'^3+bv'^2+cv'+\partial=0; \quad -v''-av'^3+bv'^2-cv'+\partial=0.$$

Сопряженная сеть имеется на любой поверхности и характеризуется уравнением

$$v'=\pm\sqrt{-\partial/b};$$

проектирующее семейство линий определится уравнением

$$\sqrt{-\frac{\partial}{b}}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{b}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{b}\right)-2\frac{\partial}{b}\left(a\frac{\partial}{b}-c\right)=0.$$

Если одновременно $b=\partial=0$, то на поверхности, определяемой этой системой, существует бесконечное множество сопряженных сетей аффинно-базисных линий.

6. Поверхности, у которых соприкасающиеся плоскости всех аффинно-базисных линий в точке пересекаются по одной прямой. Если одновременно $A-F\partial=0$, $D+Fa=0$, то на поверхностях, определяемых этой системой, соприкасающиеся плоскости всех аффинно-базисных линий в каждой точке пересекаются по одной прямой; стационарные направления в этом случае делаются неопределенными.

7. Конгруенция осей стационарных плоскостей, сопряженная относительно поверхности. Если конгруенция осей стационарных плоскостей сопряжена относительно поверхности, то характеристическое условие для этого выразится в виде:

$$c_v+b_u=0.$$

В частности, если $\lambda=0$, т. е. если проектирующие линии суть асимптотические $v=\text{const}$, получим:

$$b=\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{F}{A^2}; \quad c=\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{F^2}{A},$$

и условие сопряженности конгруенции осей стационарных плоскостей примет вид

$$\frac{F}{A} = U(u)V(v).$$

8. Конгруенция прямых пересечения стационарных плоскостей двух проектирующих семейств асимптотических. Прямая пересечения стационарных плоскостей двух проектирующих семейств асимптотических характеризуется уравнением

$$\frac{\xi}{\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{F^2}{D}} = \frac{\eta}{\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{F^2}{A}} = \frac{\zeta}{-2F}.$$

Условие сопряженности конгруенции указанных прямых относительно поверхности имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\ln\frac{D}{A} = 0.$$

Иначе: характеристический признак поверхностей Fubini состоит в том, что конгруенция прямых пересечения стационарных плоскостей двух проектирующих семейств асимптотических линий сопряжена относительно поверхности.

Поступило
11 IX 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Туганов, ДАН, 57, № 4 (1947). [2] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, II Affine Differentialgeometrie, Berlin, 1923.