Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

В. ТАРТАКОВСКИЙ

О ПРОБЛЕМЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ГРУПП

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 VII 1947)

В настоящей заметке показано, как можно применить процесс решета, разобранный в заметке (1)*, к решению проблемы тождества в некоторых типах групп.

Мы понимаем под построением канонического представления элементов группы $\mathfrak{G}$ задание такого множества K слов $\varphi(S)$, что для каждого слова $f(S)$ в K существует одно и только одно равное $f(S)$ слово $\varphi_f(S)$ и указан конечный алгорифм, дающий переход от $f(S)$ к $\varphi_f(S)$. Известно, что в группе, в которой построено каноническое представление элементов, задача тождества, тем самым, решена. Обратно, в группах, в которых решена задача тождества, можно построить некоторое каноническое представление элементов.

Если мы отнимем от множества $\mathfrak{W}(\mathfrak{G})$ всех сокращенных слов группы $\mathfrak{G}$, заданной равенствами (1), (2), (3) заметки (1), область погашения $\Pi(\mathfrak{G})$, то оставшаяся разность $K(\mathfrak{G})$ составляет, очевидно, фундаментальную область, т. е. множество канонических представлений всех элементов из $\mathfrak{G}$. Поэтому уменье построить $\Pi(\mathfrak{G})$ и, тем самым, $K(\mathfrak{G})$ дает решение проблемы тождества в группе $\mathfrak{G}$.

Как показывает вторая основная теорема теории погашения, для построения $\Pi(\mathfrak{G})$ и, тем самым, $K(\mathfrak{G})$ достаточно уметь табуляризировать только простые слова Дикка. Между тем, до настоящего времени было известно лишь, что проблема тождества эквивалентна табуляризации множества всех сокращенных слов Дикка. Табуляризация только простых слов Дикка может оказаться в ряде случаев проще, чем табуляризация множества всех сокращенных слов Дикка. Ниже будут указаны некоторые широкие классы групп, для которых табуляризация простых слов Дикка выполнима и потому для них разрешима проблема тождества.

Пусть $F(S)$ и $\Phi(S)$ — два сокращенных (внутренне) линейных слова. Если можно $F(S)$ расщепить на $F_1(S)$ и $G(S)$, а $\Phi(S)$ на $G(S)^{-1}$ и $\Phi_1(S)$, то переход от произведения $F(S)\Phi(S)$ к произведению $F_1(S)\Phi_1(S)$ мы будем называть сокращением произведения $F(S)\Phi(S)$ до $F_1(S)\Phi_1(S)$.

Мы будем также называть $G(S)$ сокращенной частью F-множителя, $G(S)^{-1}$ — сокращенной частью Φ-множителя, а $F_1(S)$ — F-компонентой и $\Phi_1(S)$ — Φ-компонентой сокращенного произведения. Если при этом $G(S)$ имеет наибольшую длину и перемножается незацепленным образом с $F_1(S)$, то мы говорим, что сокращение выполнено полностью налево. Аналогично определится полное сокращение направо.

При построении $\Pi(\mathfrak{G})$ по 2-й основной теореме можно, на основании 1-й основной теоремы, считать, что циклы $|f_i(S)|$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ в (3) уже сокращены, и пусть $l(|f_i(S)|)=\lambda_i$ и $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Разрежем циклы $|f_i^{\varepsilon}(S)|$ и $|f_j^{\eta}(S)|$ при $i \neq j$ или при $i=j$ и $\varepsilon=\eta$ в произвольных точках, а при $i=j$ и $\varepsilon=-\eta$ в точках не соответ-

* Мы будем пользоваться обозначениями и ссылаться на №№ формул заметки (1).

ственных, а в остальном произвольных. Пусть $\lambda_{i,j}^{\varepsilon,\eta}$ есть длина сокращенной части при полном сокращении налево или направо произведения линейных слов, полученных описанным выше разрезанием. Пусть $\mu_{i,j}^{\varepsilon,\eta}$ есть наибольшее из значений, которые принимает $\lambda_{i,j}^{\varepsilon,\eta}$ при всевозможных указанных выше способах разрезания циклов $|f_i^{\varepsilon}(S)|$ и $|f_j^{\eta}(S)|$. Обозначим далее

$$\underset{i,j=1,2,\ldots,n;\ \varepsilon,\eta=\pm 1}{\text{maximum}} \left(\frac{\mu_{i,j}^{\varepsilon,\eta}}{\lambda_i} ; \frac{\mu_{i,j}^{\varepsilon,\eta}}{\lambda_j} \right) = \delta.$$

Число δ мы будем называть „мерой налегания" базиса (3), а сам базис (3) „δ-базисом".

Теорема. *Если в группе $\mathfrak{G}$ (заданной равенствами* (1), (2), (3)) *мера налегания базиса $\delta < 1/8$, то каждое простое циклическое слово Дикка длины, не превосходящей Q, можно получить композицией базисных слов и их формальных обращений с суммой приведенных длин R всех факторов, не превосходящей TQ, где*

$$T = \frac{1}{1-8\delta} \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Эта теорема показывает, что возможно в конечное число действий построить все простые циклические слова Дикка группы $\mathfrak{G}$, не превосходящие по приведенной длине произвольно выбранного числа Q (само число таких слов, очевидно, конечно ввиду того, что все порождающие в $\mathfrak{G}$ имеют конечные порядки (2)). Отсюда следует

Теорема. *Если в группе $\mathfrak{G}$ мера налегания базиса $\delta < 1/8$, задача тождества решается в конечное число действий.*

Доказательство. Пусть $P(S)$ и $Q(S)$ — сравниваемые линейные слова, а $R(S)$ — сокращенное слово, тождественно равное $P(S)Q(S)^{-1}$. Если $R(S) = 1$, то $R(S)$ лежит в области погашения.

Пусть $l(R(S)) = h$. Тогда $R(S)$ должно лежать в звезде погашения циклического простого слова Дикка, длина которого не превосходит $2h+1$. Такие слова, а значит и их звезды можно построить в конечное число действий и содержимость или несодержимость $R(S)$ в каждой из этих звезд проверяется непосредственно. Если $R(S)$ ни в одной из них не лежит, то $R(S) \neq 1$. Если лежит, то можно указать сокращенное линейное слово $R_1(S)$, равное $R(S)$, но младше его. Поступая с $R_1(S)$ как с $R(S)$ и продолжая этот процесс, приходим к последовательности равных в $\mathfrak{G}$, но убывающих по старшинству слов: $R(S) > R_1(S) > R_2(S) > \ldots$

Легко доказать, что цепочка убывающих сокращенных линейных слов не может быть бесконечной. Пусть она обрывается на $R_k(S)$. Если $R_k(S) \approx 1$, то $P(S) = Q(S)$, если же $R_k(S)$ не ≈ 1 то $P(S) \neq Q(S)$.

Этот алгорифм в случае равенства $P(S)$ и $Q(S)$ позволяет указать процесс преобразования их друг в друга при помощи соотношений (3).

Условие периодичности порождающих элементов не является существенным. Задача тождества решается изложенным методом при $\delta < 1/8$ и в том случае, когда часть порождающих или все они не связаны условиями периодичности. Можно также расширить и круг базисов, допускающих разрешимость проблемы тождества, указанным методом. Таковы, например, k-сократимые базисы, т. е. такие базисы, что при последовательных умножениях расщепления $|f_i(S)|$ на расщепления $|f_j^{\varepsilon}(S)|$ надо не менее k умножений, чтобы полностью сократить $|f_i(S)|$.

Научно-исследовательский институт
математики и механики Ленинградского
государственного университета

Поступило
16 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Тартаковский, ДАН, 58, № 8 (1947).