Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

Н. А. САПОГОВ

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА — ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 IX 1947)

1. В настоящей заметке устанавливаются три результата о приложимости предельной теоремы Лапласа — Ляпунова к суммам случайных величин, связанных в цепь Маркова. Доказательство их производится с помощью метода акад. С. Н. Бернштейна, развитого в его, теперь классической, работе ([1]).

Пусть рассматривается последовательность случайных величин x_h, связанных в цепь Маркова. Предполагая, что число k_h возможных значений $a_1^{(h)}, a_2^{(h)}, \ldots, a_{k_h}^{(h)}$ каждой из величин x_h конечно, через $P_{j,i}^{(h)}$ будем обозначать вероятности перехода, т. е. вероятности равенства $x_h = a_i^{(h)}$ при предположении, что $x_{h-1} = a_j^{(h-1)}$.

Мы считаем, вслед за С. Н. Бернштейном, что рассматриваемые нами законы распределения вероятностей величин x_h зависят, кроме номера случайной величины x_h, также еще и от числа n слагаемых суммы $s_n = \sum_{h=1}^{n} x_h$. Мы говорим, что к $s_n = \sum_{h=1}^{n} x_h$ приложима предельная теорема Лапласа — Ляпунова, если при $n \to \infty$

$$P\left(\sum_{h=1}^{n} (x_h - a_h) < t\sqrt{B_n}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-t^2/2}\,dt$$

равномерно в каждом конечном интервале $|t| \leqslant T$; здесь $a_h =$ м.о. x_h, $B_n =$ м. о. $\left(\sum_{h=1}^{n} (x_h - a_h)\right)_2$, $P(\ldots)$ — вероятность неравенства, указанного в скобках.

2. Будем основываться на следующей общей теореме, с небольшим видоизменением принадлежащей С. Н. Бернштейну.

Теорема* *Пусть $s_n = \sum_{h=1}^{n} x_h$ — сумма зависимых величин, обладающих свойствами:*

1) $B_n =$ м. о. $s_n^2 > Mn^\lambda$, *где* $\lambda > 1/2$, м. о. $x_h = 0$, $M = \mathrm{const}$;

2) *каковы бы ни были уже известные значения некоторых величин x_h, можно указать такие числа L_q, что для $i > k$ матема-*

* См. ([1]), 14 §, теорема С.

тическое ожидание $|x_i^q|$, *где* q — *какое угодно целое число, остается меньше* L_q;

3) *если, кроме того,* $i-k>n^\rho$, $l_j-i\geqslant l_1-i>n^\rho$, *то* $|\text{м. о.}'\, x_i|<e^{-n^\varepsilon}$, $|\text{м. о.}'\, x_i x_{l_1} x_{l_2}\ldots x_{l_s}|<L_1^s e^{-n^\varepsilon}$, *где* ε — *данное сколь угодно малое положительное число, а изменение* м. о.' $x_i x_j$ *не превышает* $\frac{1}{n^{2-\lambda}}$, *когда* $j-k>n^\rho$.

При этих условиях предельная теорема приложима к сумме s_n, *если только* $\rho<\frac{2\lambda-1}{3}$; м. о.'$z$ — *знак условного математического ожидания* z, *вычисленного при оговариваемых условиях.*

Отличие от формулировки, данной С. Н. Бернштейном, состоит в том, что он требует неравенства $|\text{м. о.}'\, x_i|<e^{-n^\varepsilon}$, каковы бы ни были x_k при $i-k>n^\rho$ и $k-i>n^\rho$. Мы требуем выполнения указанного неравенства только при $i-k>n^\rho$, но вводим, взамен этого, новое условие относительно м. о.' $x_i x_{l_1} x_{l_2}\ldots x_{l_s}$. Это отличие, не играющее большой роли в случае, разбираемом С. Н. Бернштейном, когда величины x_h принимают только по два значения, оказывается существенным для общего случая, который интересует нас. Доказательство формулированной теоремы, данное С. Н. Бернштейном, сохраняется дословно.

3. Теорема 1. *Пусть* $s_n=\sum_{h=1}^{n} x_h$ — *сумма величин, связанных в цепь Маркова* (м. о. $x_h=0$), *для которых выполнены условия:*

1) x_h *принимает только конечное множество возможных значений* $a_1^{(h)}, a_2^{(h)}, \ldots, a_{k_h}^{(h)}$, $k_h\geqslant 2$, *удовлетворяющих неравенству* $\frac{1}{k_h}\sum_{i=1}^{k_h}(a_i^{(h)}-\xi_h)^2=d_h^2\geqslant d^2>0$, *где* $\xi_h=\frac{1}{k_h}\sum_{i=1}^{k_h} a_i^{(h)}$ *и* $d^2=\text{const}$;

2) $P_{j,i}^{(h)}\geqslant\frac{1}{k_h n^\alpha}$;

3) м. о.' $|x_h^2|\leqslant L_q$, *каковы бы ни были* x_k *и* $q>0$ *(для всех* j *и* i*).*

При этих условиях предельная теорема приложима к s_n, *если* $\alpha<{}^1/_5$.

Для доказательства этой теоремы прежде всего заметим, что дисперсия B_n суммы s_n, как это доказано С. Н. Бернштейном в работе [2], будет не меньше (при $n\to\infty$) $\frac{1}{4n^\alpha}\sum_{1}^{n} d_h^2=Mn^\lambda$ (так как $d_h^2\geqslant d^2>0$) с $\lambda=1-\alpha>{}^4/_5$. Остается, таким образом, проверить выполнимость условия 3) формулированной выше видоизмененной общей теоремы Бернштейна.

Пользуясь известным рассуждением Маркова, без труда убеждаемся в том, что $|\text{м. о.}'\, x_i|<H\left(1-\frac{1}{2n^\alpha}\right)^{n^\rho}<e^{-n^\varepsilon}$ и изменение м. о.' $x_i x_{l_1} x_{l_2}\ldots x_{l_s}$, $i_j\geqslant i$, не превышает $L_1^s e^{-n^\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$ — постоянное число, каковы бы ни были x_k, $i-k>n^\rho$, если $\rho>\alpha$ ($H=\text{const}$). Оценка м. о.' $x_i x_{l_1} x_{l_2}\ldots x_{l_s}$, если добавлено еще условие $l_1-i>n^\rho$, выполняется так:

$$\text{м. о.}'(x_i x_{l_1}\cdot\ldots x_{l_s})=\text{м. о.}'[x_i\,\underset{x_i}{\text{м. о.}'}(x_{l_1}\cdot\ldots x_{l_s})]-$$

$$-\text{м. о.}' x_i \,\text{м. о.}\,(x_{l_1}\ldots x_{l_s}) + \text{м. о.}' x_i \,\text{м. о.}\,(x_{l_1}\ldots x_{l_s}) =$$
$$= \text{м. о.}' [x_i (\underset{x_i}{\text{м. о.}'} (x_{l_1}\ldots x_{l_s}) - \text{м. о.}' (x_{l_1}\ldots x_{l_s}))] + \text{м. о.}' x_i \,\text{м. о.}\,(x_{l_1}\ldots x_{l_s}).$$

Поэтому

$$|\text{м. о.}' (x_i x_{l_1}\ldots x_{l_s})| \leqslant$$
$$\leqslant |\text{м. о.}' x_i [\underset{x_i}{\text{м. о.}'} (x_{l_1}\ldots x_{l_s}) - \text{м. о.}\,(x_{l_1}\ldots x_{l_s})]| + |\text{м. о.}' x_i \,\text{м. о.}\,(x_{l_1}\ldots x_{l_s})| \leqslant$$
$$\leqslant L_1^{s+1} e^{-n^\varepsilon} + L_1^s e^{-n^\varepsilon} < L_1^s e^{-n^{\varepsilon'}}$$

(при любом $\varepsilon' < \varepsilon$, для больших n), что завершает доказательство нашей теоремы, так как требуемое еще неравенство $\rho < \frac{2\lambda - 1}{3}$ осуществляется в силу $\alpha < {}^1/_5$ (напомним, что $\lambda = 1 - \alpha$).

В качестве следствия доказанной теоремы получаем предложение, высказанное С. Н. Бернштейном в § 15 работы ([1]):

Предельная теорема приложима к простой цепи величин x_h, *каждая из которых принимает одни и те же* l *значений* $a_1, a_2, \ldots, a_l$, *если вероятности перехода* $P_{i,k}^{(h)} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}$, *где* $\alpha < {}^1/_5$.

Теорема, аналогичная теореме 1, справедлива и для непрерывно распределенных величин. А именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть* $s_n = \Sigma x_h$ — *сумма связанных в цепь величин, причем* x_k *может принимать все значения из интервала* $[a_h, b_h]$ *(конечного) с плотностью вероятностей перехода от значения* $x_{h-1} = y$ *к значению* $x_h = x$, *равной* $\varphi_h(y, x)$.

Если

1) $b_h - a_h = L_h \geqslant L = \text{const}$,

2) $\varphi_h(y, x) \geqslant \frac{1}{n^\alpha L_h}$,

3) $\text{м. о.}' |x_i^q| \leqslant L_q$,

то предельная теорема приложима к s_n *при* $\alpha < {}^1/_5$.

Доказательство этой теоремы, на котором мы не останавливаемся, совершенно аналогично доказательству теоремы 1. Теорема 2 может рассматриваться также как предельный случай теоремы 1.

4. Предельная теорема может остаться приложимой к $s_n = \Sigma x_h$ при условиях, допускающих равенство некоторых из вероятностей перехода нулю. Например, справедлива

Теорема 3. *Пусть* x_h *принимает конечное множество значений* $a_0^{(h)}, \ldots, a_{k_h}^{(h)}$, $k_h \geqslant 1$ *и* $\text{м. о.}' |x_n^q| < L_q$. *Если для каждого* h *существует индекс* $i = i(h)$, *для которого выполнены условия:*

1) $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant P_{j,i}^{(h)} \leqslant 1 - \frac{1}{n^\alpha}$ *при всех* j,

2) $|a_i - a_l| \geqslant d > 0$ *при всех* $l \neq i = i(h)$,

то предельная теорема приложима к $s_n = \sum_{h=1}^{n} x_h$, *если* $\alpha < {}^1/_7$.

Оценка изменений $\text{м. о.}' x_i$, $\text{м. о.}' x_i x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, а также величины $|\text{м. о.}' x_i x_{i_1}\ldots x_{l_s}|$ при $l_1 - i > n^\rho$, $i - k > n^\rho$ производится так, как это было указано при доказательстве теоремы 1. Нижняя граница дисперсии B_n суммы s_n устанавливается с помощью неравенства С. Н. Бернштейна (см. ([2])):

$$B(s_n) \geqslant {}^1/_2 (\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \ldots + \bar{b}_n),$$

где $\bar{b}_h$ означает среднюю условную дисперсию x_h после того, как заданы значения x_{h-1} и x_{h+1}.

Вследствие того, что B_n представляется в виде $B_n = C + \sum\limits_i A_i P^{(h)}_{j,i}$, где C и A_i положительны и не зависят от $P^{(h)}_{j,i}$, заключаем, что минимум B_n при соблюдении неравенства $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant P^{(h)}_{j,i(h)} \leqslant 1 - \frac{1}{n^\alpha}$ достигается в том случае, когда только две из величин $P^{(h)}_{j,0}$, $P^{(h)}_{j,1}, \ldots, P^{(h)}_{j,k_h}$ отличны от нуля, а все другие равны нулю. Одна из двух отличных от нуля величин имеет второй нижний индекс $i = i(h)$.

Оценим $\bar{b}_h$ (обозначения из ([2])):

$$\bar{b}_h \geqslant \sum_{j,l} P^{(h)}_{0,j} P^{(h+1)}_{j,l} \left[a^{(h)}_j - \alpha_h(l)\right]^2$$

(см. (11) из ([2])). Можем считать, выбирая надлежащую нумерацию величин $a^{(h)}_j$, что

$$P^{(h)}_{0,0} = P^{(h+1)}_{0,0} = \Delta = \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right), \quad P^{(h)}_{0,1} = P^{(h+1)}_{0,1} = \delta = \frac{1}{n^\alpha},$$

$$P^{(h)}_{0,j} = P^{(h+1)}_{0,j} = 0 \text{ при } 2 \leqslant j;$$

$$P^{(h+1)}_{i,j_1} = \Delta, \quad P^{(h+1)}_{i,j_2} = \delta, \quad P^{(h+1)}_{i,j} = 0 \text{ при } j \neq j_1 \text{ и } j \neq j_2.$$

Не забудем, что j_1 или j_2 совпадает с индексом $i = i(h)$, который мы считаем равным нулю. Итак,

$$\bar{b}_h \geqslant \Delta\delta\left(a_0^{(h)} - \alpha_h(0)\right)^2 + \Delta\delta\left(a_1^{(h)} - \alpha_h(j_1)\right)^2 + \delta\delta\left(a_1^{(h)} - \alpha_h(j_2)\right)^2.$$

Если $j_1 = 0$, то $\bar{b}_h \geqslant \Delta\delta\left[\left(a_0^{(h)} - \alpha_h(0)\right)^2 + \left(a_1^{(h)} - \alpha_h(0)\right)^2\right]$, если $j_2 = 0$, то $\bar{b}_h \geqslant \delta^2\left[\left(a_0^{(h)} - \alpha_h(0)\right)^2 + \left(a_1^{(h)} - \alpha_h(0)\right)^2\right]$. Выражение, стоящее в квадратных скобках, при любом выборе $\alpha_h(0)$ не меньше $\frac{d^2}{2}$, так как $|a_1 - a_0| \geqslant d$. Следовательно, в обоих случаях $\bar{b}_h \geqslant \delta^2 \frac{d^2}{2} = \frac{d^2}{2n^{2\alpha}}$. Поэтому $B_n \geqslant \frac{d^2}{4} n^{1-2\alpha}$. Остается заметить, что для выполнения неравенства $\rho < \frac{2\lambda - 1}{3}$ достаточно условия $\alpha < {}^1/_7$.

Поступило
9 IX 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Усп. мат. наук, **10** (1944). [2] С. Н. Бернштейн, Матем. сб., **1**, (43): 1 (1936).