Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

Е. Я. РЕМЕЗ

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ ПОЛИА—ДЖЕКСОНА—ЖЮЛИА И НЕКОТОРЫХ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЕМУ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ АЛГОРИФМАХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 VI 1947)

В наших предыдущих сообщениях ([1], [2]) был выяснен ряд фактов, касающихся быстроты сходимости предельного перехода от приближений по принципу наименьших m-х степеней к приближениям чебышевским при $m\to\infty$. Ход исследования был, для конкретности, изложен применительно к случаю допустимых обобщенных полиномов $\Phi(x)=v_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i(x)$, где $v_i(x)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ — действительные числовые функции действительного аргумента x, непрерывные и линейно независимые на данном сегменте $[a, b]$ длины $b-a=l$. За меру быстроты сходимости „процесса Полиа—Джексона" мы брали быстроту убывания при $m\to\infty$ величины $\alpha=\alpha_m$, определяемой соотношениями

$$\delta_0[\Phi_0]=\rho, \quad \delta_0[\Phi_m]-\rho=2\alpha_m\rho=2\alpha\rho, \tag{1}$$

где $\delta_0[\Phi]$, $\delta_m[\Phi]$ $(m>1)$ обозначают, соответственно, чебышевское (равномерное) и среднее степенное уклонение от нуля полинома $\Phi(x)$ на $[a, b]$, а Φ_0 и Φ_m, соответственно, решения задач $\delta_0[\Phi]=\min$ и $\delta_m[\Phi]=\min$.

Здесь мы подвергнем изучению ряд аналогичных вопросов, касающихся процессов интерполяционных, связанных с построением решений $\Phi_{mN}(x)$ задачи среднего степенного приближения на переменном конечном множестве N точек сегмента $[a, b]$* и с исследованием доставляемого ими равномерного приближения на целом сегменте $[a, b]$ при $N\to\infty$, $m\to\infty$.

Сопоставим каждому целому числу $N\geqslant n+1$ некоторое определенное точечное множество $E_N\subset[a, b]$, состоящее из N точек $x_{N1}<x_{N2}<\ldots<x_{NN}$, и соответствующие minimum-задачи:

$$\delta_{m,N}[\Phi]=\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\Phi(x_{Nj})|^m\right]^{1/m}=\min \quad (m>1), \tag{2}$$

$$\delta_{0,N}[\Phi]=\max_{x\in E_N}|\Phi(x)|=\min, \tag{3}$$

* Распространение результатов на различные случаи многомерных областей или комплексных функций и тут усматривается без труда.

решениями которых пусть будут $\Phi_{m,N}(x)$ и $\Phi_{0,N}(x)$ соответственно*. Положим еще

$$\delta_{0,N}[\Phi_{0,N}]=\rho_N, \quad \delta_{0,N}[\Phi_{m,N}]-\rho_N=2\,\alpha_{m,N}\,\rho_N, \tag{4}$$

$$\delta_0[\Phi_{m,N}]-\rho=\Delta_{m,N}=2\,\beta_{m,N}\,\rho. \tag{5}$$

Установление оценок для $\beta_{m,N}$ при больших значениях m, N и сравнение их с оценками для α_m составит конечную цель дальнейших рассмотрений.

1°. Существенным для дальнейшего оказывается требование, чтобы при $N\to\infty$ точки множества E_N распределялись на $[a, b]$ хотя бы приближенно равномерно в некотором смысле. Мы ограничимся здесь формулировкой этого требования в виде условия

$$\sup_N\left(\lambda_N:\frac{l}{N}\right)>\infty \quad (\lambda_N=\max\{x_{N1}-a,\ x_{N2}-x_{N1},\ldots,b-x_{NN}\}). \tag{6}$$

Теорема. *При соблюдении условия* (6) *коэффициенты* $c_{m,N,i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ *полинома* $\Phi_{m,N}$ *являются равномерно ограниченными для всех* $N\geqslant n+1$ *и* $m>1$.

Доказательство. Положим, вообще, для полинома $\Omega(x)=\sum_{i=0}^{n}c_iv_i(x)$ (без обязательного выполнения условия $c_0=1$)

$$L=L[\Omega]=\max\{|c_0|,\ |c_1|,\ldots,|c_n|\}. \tag{7}$$

Считая установленным предложение, аналогичное доказываемой теореме, для любого фиксированного** E_N и, следовательно, вообще, для ограниченного $N\leqslant\overline{N}$, нам достаточно будет, доказывая теорему от противного, предположить существование последовательности

$$\Phi_{\mathrm{I}}\equiv\Phi_{m_1,N_1},\quad \Phi_{\mathrm{II}}\equiv\Phi_{m_2,N_2},\ldots,\Phi_{(\nu)}\equiv\Phi_{m_\nu,N_\nu},\ldots, \tag{8}$$

для которой одновременно $N_\nu\to\infty$, $L_\nu=L[\Phi_{(\nu)}]\to\infty$ при $\nu\to\infty$. Рассмотрим соответствующие „приведенные полиномы“ $\Omega_\nu(x)=\Phi_{(\nu)}:L_\nu$, для которых, очевидно, $L[\Omega_\nu]=1$. Обозначая $\delta_{m_\nu,N_\nu}[\Phi_{(\nu)}]=M_\nu$, мы из требования $M_\nu\leqslant\delta_{m_\nu,N_\nu}[\Phi_0]\leqslant\rho$ получаем $\delta_{m_\nu,N_\nu}[\Omega_\nu]=M_\nu:L_\nu\leqslant\rho:L_\nu\to0$ при $\nu\to\infty$. Но, с другой стороны, из условия $L[\Omega_\nu]=1$ вытекает, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса, возможность выделить из последовательности $\{\Omega_\nu\}$ частную последовательность, сходящуюся равномерно на $[a, b]$ к некоторому предельному полиному Ω_*, причем наверное $\Omega_*(x)\not\equiv0$ на $[a, b]$, поскольку $L[\Omega_*]=1$. В силу условия (6) величина $\delta_{m_\nu,N_\nu}[\Omega_\nu]$ оказывается абсолютно ограниченной снизу для указанной частной последовательности Ω_ν — в противоречии с полученным выше соотношением $\delta_{m_\nu,N_\nu}[\Omega_\nu]\to0$, чем доказательство от противного и завершается.

---

* $\Phi_{m,N}$ и тут будут удовлетворять требованию единственности, если условиться в состав каждого E_N включать n точек, на которых функции $v_1(x),\ldots,v_n(x)$ линейно независимы. С другой стороны, можно отметить, что для достаточно больших N указанное требование оказывается здесь автоматически обеспеченным при условии (6).

** Справедливость такого предложения непосредственно усматривается на основе неравенства $\max\limits_{x\in E}|\Omega(x)|\geqslant kL[\Omega]$ ($k=\mathrm{const}>0$ не зависит от выбора Ω), которое легко доказать для любого фиксированного конечного $E\subset[a, b]$ при условии линейной независимости функций $v_i(x)$ на E (ср. предыдущую сноску) и которое достаточно, очевидно, установить для случая $L[\Omega]=1$. В гораздо более общем виде аналогичное предложение вытекает из одной установленной мною ранее ((3), стр. 441; (4), стр. 273) леммы.

2°. Рассматривая предварительно задачу (2) только в ее связи с задачей (3), мы для оценки величины $\alpha_{m,N}$, исходя из требования $\delta_{m,N}[\Phi_{m,N}] \leqslant \delta_{m,N}[\Phi_{0,N}]$, имеем последовательно:

$$(\rho_N)^m (1+2\alpha_{m,N})^m \leqslant N(\rho_N)^m, \tag{9}$$

$$\alpha_{m,N} \leqslant \frac{1}{2\sigma_{m,N}} \frac{\log N}{m}, \text{ где } \sigma_{m,N} = \frac{\log(1+2\alpha_{m,N})}{2\alpha_{m,N}}^{*}. \tag{10}$$

Опираясь на доказанную теорему и на устанавливаемое аналогично соотношение $\varliminf\limits_{N\to\infty} \rho_N > 0$, легко убедиться, что *величина $\sigma_{m,N}$ является абсолютно ограниченной снизу:* $\inf \sigma_{m,N} > 0$ $(N \geqslant n+1,\ m>1)$, и, таким образом, *величина $\alpha_{m,N}$ оказывается бесконечно малой,* когда $(\log N : m) \to 0$. В связи с этим мы будем иметь также $\sigma_{m,N} \to 1$ при $(\log N : m) \to 0$.

3°. Теперь мы можем заняться уже оценками величин $\Delta_{m,N}$ и $\beta_{m,N} = \Delta_{m,N} : 2\rho$, связывая задачу (2) с задачей $\delta_0[\Phi] = \min$. Заметим, прежде всего, что

$$\Delta_{m,n} = \delta_0[\Phi_{m,N}] - \rho \leqslant \{\delta_0[\Phi_{m,n}] - \delta_{0,N}[\Phi_{m,N}]\} + \{\delta_{0,N}[\Phi_{m,N}] - \rho_N\}. \tag{11}$$

Соответственно рассмотрениям сообщения [2], мы и тут предполо- жим непрерывные функции $v_i(x)$ принадлежащими к некоторому струк- турному классу, характеризуемому условием $\omega(\delta) \leqslant K\overline{\omega}(\delta)$, где $\overline{\omega}(\delta)$— определенная на сколь угодно малом сегменте $[0, l_1]$ непрерывная возрастающая функция с невозрастающей производной справа, причем $\overline{\omega}(0)=0$. В силу теоремы 1° данной статьи полином $\Phi_{m,N}(x)$ будет принадлежать к тому же структурному классу при некотором значе- нии коэффициента K, которое можно считать либо одним и тем же для всех $m>1$, $N \geqslant n+1$, либо определяемым более точным об- разом для достаточно больших $m \geqslant \underline{m}$, $N \geqslant \underline{N}$. Сохраняя обо- значение $\chi(x)$ для функции, обратной $\overline{\omega}(x)$, мы и здесь введем в рас- смотрение функцию

$$A = \varphi(M) \text{ — решение уравнения } M = \frac{\log[1:\chi(A)]}{A}, \tag{12}$$

свойства которой были нами выяснены в [2]. Из (11) получаем (ср. (10) и (6)):

$$\Delta_{m,N} \leqslant K\overline{\omega}(\lambda_N) + 2\alpha_{m,N}\rho_N \leqslant K\overline{\omega}(\lambda_N) + \frac{\rho}{\sigma_{m,N}} \frac{\log N}{m}. \tag{13}$$

Мы теперь введем в рассмотрение интерполяционный про- цесс более определенного типа, устанавливая общий харак- тер зависимости между изменениями параметров m и N с помощью условия

$$\lambda_N = \chi[\varphi(qm)], \tag{14}$$

где $q = q_m > 0$ — некоторый оставляемый в нашем распоряжении пара- метр, который мы, для простоты, предположим здесь ограниченным с двух сторон: $0 < c_1 < q_m < c_2$. Учитывая, кроме того, двухстороннюю ограниченность отношения $\lambda_N : \frac{l}{N} = s_N$ $\left(\frac{2}{3} \leqslant \frac{N}{N+1} \leqslant s_N \leqslant \sup\limits_N \left(\lambda_N : \frac{l}{N}\right) < \right.$

* Мы будем полагать $\sigma_{m,N} = 1$ в случае $\alpha_{m,N} = 0$, а также и в случае $\rho_N = 0$.

$< \infty$ в силу (6)), мы из (14) и (12) легко найдем:

$$\log N = (1+\eta)\log\{1 : \chi[\varphi(q, m)]\} = (1+\eta)\, qm\, \varphi(qm) \quad \left(\lim_{m\to\infty}\eta = 0\right). \tag{15}$$

Разделив (13) на 2ρ, мы, в силу (14) и (15), учитывая, кроме того, что $\sigma_{m,N}\to 1$, в виду выполнения условия $(\log N : m)\to 0$ (2°), получим

$$\beta_{m,N} \leqslant \frac{K}{2\rho}\varphi(qm) + \frac{1+\varepsilon}{2} q\varphi(qm) \quad \left(\lim_{m\to\infty}\varepsilon = 0\right). \tag{16}$$

Это означает, в силу свойств $\varphi(M)$ (см. [2]), что

$$\beta_{m,N} \leqslant \left(\frac{K}{2\rho} + \frac{1+\varepsilon}{2} q\right) q^{-\theta}\varphi(m) \quad (0 < \theta = \theta_m < 1) \tag{17}$$

Сличая с результатами предыдущего сообщения [2], мы можем прежде всего, констатировать, что *оценке* $\alpha = \alpha_m = O[\varphi(m)]$ *тут вполне соответствует оценка* $\beta_{m,N} = O[\varphi(m)]$.

4°. Соотношение (16) может служить отправным пунктом для различных постановок вопроса о возможно выгодном подборе параметра $q = q_m$ в определенном нами интерполяционном процессе. Мы ограничимся следующим замечанием. Во всех случаях, когда решение $\Phi_0(x)$ чебышевской задачи $\delta_0[\Phi] = \min$ оказывается единственным, коэффициент K в (16) может быть отождествлен, при больших значениях m, с аналогичным структурным коэффициентом k в формуле (10) сообщения [2], и на этой основе может быть произведено более точное количественное сравнение соответствующих оценок. Такое сравнение, выполненное для каждого из широких конкретных структурных классов, перечисленных в 2° сообщения [2], обнаруживает *возможность распорядиться параметром* $q = q_m$ *так, чтобы достигнуть сколь угодно близкого совпадения для больших значений* m *верхних границ величин* $\beta_{m,N}$ *и* α_m, характеризующих быстроту сходимости обоих сопоставляемых процессов.

5°. Все эти заключения имеют, между прочим, самое близкое значение для вопросов приложения к чебышевским задачам предложенного мной [3, 4] метода последовательных квадратических приближений для построения решений задач средней степенной апроксимации, доставляя, в частности, обоснование интерполяционного варианта этого метода.

Поступило
19 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Ремез, ДАН, **58**, № 7 (1947). [2] Е. Ремез, там же, **58**, № 8 (1947). [3] Е. Ремез, Матем. сб., **9** (51): 2 (1941). [4] В. Ремез, Ювіл. збірник АН УРСР, **1** (1944).