Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

И. И. ОГИЕВЕЦКИЙ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА НА ДВОЙНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 8 X 1947)

Пусть дан двойной ряд $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$. Положим

$$s_{mn}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}, \quad \sigma_{m,n}=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} s_{ij}.$$

Теорема. *Если*

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sigma_{mn}=l, \tag{1a}$$

$$\overline{\lim}\frac{|s_{mn}|}{m+1}\leqslant A_n, \tag{1b}$$

$$\overline{\lim}\frac{|s_{mn}|}{n+1}\leqslant B_m, \tag{1c}$$

то двойной степенный ряд

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}x^i y^j \tag{2}$$

абсолютно сходится при $|x|<1$, $|y|<1$ *и* $\lim\limits_{(x,y)_\lambda\to 1} f(x,y)=l$.

Символ $(x,y)_\lambda\to 1$ обозначает такое стремление x и y к единице, при котором $\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{1-x}{1-y}\leqslant\lambda$ $(\lambda>1)$.

Доказательство. Из тождества $s_{mn}=(m+1)(n+1)\sigma_{mn}-m(n+1)\sigma_{m-1,n}-(m+1)n\sigma_{m,n-1}+mn\sigma_{m-1,n-1}$ и условия (1a) следует, что $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{|s_{mn}|}{(m+1)(n+1)}=0$. Из этого и условий (1b) и (1c) теоремы следует существование такого D, что

$$|s_{mn}|\leqslant D(m+1)(n+1) \tag{3}$$

для всех m и n. Из

$$a_{mn}=s_{mn}-s_{m,n-1}-s_{m-1,n}+s_{m-1,n-1} \tag{4}$$

и (3) следует

$$|a_{mn}|\leqslant 4D(m+1)(n+1). \tag{5}$$

Отсюда легко получить абсолютную сходимость (2). Двойной ряд *

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)(j+1)\sigma_{ij}x^i y^j \tag{6}$$

абсолютно сходится. Действительно,

$$|\sigma_{mn}|\leqslant\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}|s_{ij}|\leqslant\frac{D\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(i+1)(j+1)}{(m+1)(n+1)}=$$
$$=D'(m+2)(n+2). \tag{6a}$$

Отсюда

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)(i+1)|\sigma_{ij}|x^i y^j\leqslant$$

$$\leqslant D'\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)x^i y^j=$$

$$=D'\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(i+2)x^i\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)y^j=\frac{D'}{(1-x)^3(1-y)^3}.$$

Из (4) и абсолютной сходимости (2) следует, что

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}x^i y^j=(1-x)(1-y)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}s_{ij}x^i y^j. \tag{7}$$

Так как

$$s_{mn}=(m+1)(n+1)\sigma_{mn}-(m+1)n\sigma_{m,n-1}-$$
$$-m(n+1)\sigma_{m-1,n}+mn\sigma_{m-1,n-1}, \tag{8}$$

то, используя (8) и абсолютную сходимость (6), получим, что

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}s_{ij}x^i y^j=(1-x)(1-y)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)(j+1)\sigma_{ij}x^i y^j. \tag{9}$$

Сопоставив (7) и (9), получим

$$f(x,y)-l=(1-x)^2(1-y)^2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)(j+1)\{\sigma_{ij}-l\}x^i y^j. \tag{10}$$

Так как $\lim\limits_{\substack{i\to\infty\\ j\to\infty}}\sigma_{ij}=l$, то для любого ε можно определить такое N, что для всех $i, j\geqslant N$

$$|\sigma_{ij}-l|<\varepsilon/4. \tag{11}$$

Из (10) получим:

$$|f(x,y)-l|\leqslant(1-x)^2(1-y)^2\left|\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}(i+1)(j+1)(\sigma_{ij}-l)x^i y^j\right|+$$

$$+(1-x)^2(1-y)^2\left|\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=N}^{\infty}(i+1)(j+1)(\sigma_{ij}-l)x^i y^j\right|+$$

* Для упрощения записи вместо $|x|$ и $|y|$ пишем x и y.

$$+(1-x)^2(1-y)^2\left|\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=N}^{\infty}(i+1)(j+1)(\sigma_{ij}-l)x^iy^j\right|+$$

$$+(1-x)^2(1-y)^2\left|\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=N}^{\infty}(i+1)(j+1)(\sigma_{ij}-l)x^iy^j\right|. \qquad (12)$$

Легко видеть, что первое слагаемое при x и y, достаточно близких к единице, может быть сделано менее $\varepsilon/4$. Учитывая (6а), имеем

$$(1-x)^2(1-y)^2\sum_{j=N}^{\infty}(i+1)(j+1)|\sigma_{ij}|x^iy^j+$$

$$+|l|(1-x)^2(1-y)^2\sum_{j=N}^{\infty}(i+1)(j+1)x^iy^j\leqslant$$

$$\leqslant(1-x)^2(1-y)^2\sum_{j=N}^{\infty}D(i+1)(j+1)(i+2)(j+2)x^iy^j+$$

$$+|l|(1-x)^2(1-y)^2\sum_{j=N}^{\infty}(i+1)(j+1)x^iy^j\leqslant$$

$$\leqslant D'(i+1)(i+2)x^i(1-x)^2(1-y)^2\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)y^j+$$

$$+|l|(1-x)^2(1-y)^2(i+1)x^i\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)y^j. \qquad (13)$$

Так как

$$\sum_{j=l}^{\infty}(j+1)(j+2)y^j=\frac{2}{(1-y)^3};\quad \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)y^j=\frac{1}{(1-y)^2}$$

и

$$-\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{1-x}{1-y}\leqslant\lambda,$$

то

$$D(i+1)(i+2)x^i(1-x)^2(1-y)^2\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)y^j+$$

$$+|l|(1-x)^2(1-y)^2(i+1)x^i\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)y^j\leqslant$$

$$\leqslant D'(1-y)+|l|(1-x)^2(i+1), \qquad (14)$$

т. е. при $(x, y)_\lambda$ достаточно близком к 1 второе слагаемое (12) менее $\varepsilon/4$. Совершенно аналогично можно показать, что и третье слагаемое (12) можно сделать менее $\varepsilon/4$. Рассмотрим четвертое слагаемое (12). Принимая во внимание (11), имеем:

$$(1-x)^2(1-y)^2\left|\sum_{j=N}^{\infty}\sum_{i=N}^{\infty}(i+1)(j+1)(\sigma_{ij}-l)x^iy^j\right|\leqslant$$

$$\leqslant(1-x)^2(1-y)^2\sum_{j=N}^{\infty}\sum_{i=N}^{\infty}(i+1)(j+1)|\sigma_{ij}-l|x^iy^j\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}(1-x)^2(1-y)^2\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=N}^{\infty}(i+1)(j+1)x^iy^j\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4}(1-x)^2(1-y)^2 \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)(j+1)x^i y^j = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следовательно, $|f(x, y)-l| < \varepsilon$, где ε произвольно мало ч. т. д.

Примером * двойного ряда, удовлетворяющего условиям теоремы, может быть следующий: $s_{0j}=j+1$, $s_{1j}=-j$, $s_{2j}=0$, $s_{ii}=1$ (i нечетное $\geqslant 3$); $s_{ij}=0$ (для всех остальных индексов).

На том же примере нетрудно убедиться, что при независимом стремлении x и y к единице теорема не имеет места. Действительно, коэффициенты рассматриваемого двойного ряда будут: $a_{0j}=1$, $a_{10}=-1$, $a_{1j}=-2$ ($j \geqslant 1$), $a_{20}=0$, $a_{2j}=1$ ($j\geqslant 1$), $a_{ii}=1$ ($i \geqslant 3$), $a_{i,\,i+1}=-1$ (i нечетное $\geqslant 3$), $a_{i,\,i-1}=-1$ (i четное $\geqslant 4$), $a_{ij}=0$ (остальные значения i, j). Очевидно, что

$$f(x, y)=(1+y+y^2+\ldots)-(x+2xy+2xy^2+\ldots)+$$
$$+(x^2y+x^2y^2+\ldots)+\{x^3y^3(1-x)(1-y)+x^5y^5(1-x)(1-y)+\ldots\}=$$
$$=\frac{(1-x)(1-xy)}{1-y}+\frac{x^3y^3(1-x)(1-y)}{1-x^2y^2}.$$

Предел второго слагаемого равен нулю при любом стремлении x и y к 1. Предел же первого слагаемого при соответствующем стремлении x и y к 1 может быть равным любому $C>0$. Действительно, пусть $x=1-\sqrt{C}\alpha$, $y=1-\alpha^2$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{(1-x)(1-xy)}{1-y}=$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sqrt{C}\alpha(\sqrt{C}\alpha+\alpha^2-\sqrt{C}\alpha^3)}{\alpha^2}=C$$ (если взять $y=1-\alpha^3$, то $C=\infty$).

Итак $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x, y)=C$, где $0<C\leqslant\infty$.

Ограничения, налагаемые на s_{mn} условиями теоремы, существенны. Действительно, рассмотрим двойной ряд $a_{0j}=2j+1$, $a_{1j}=-4j-2$, $a_{2j}=2j+1$, $a_{ii}=1$ ($i\geqslant 3$), $a_{i,\,i+1}=-1$ (i нечетное $\geqslant 3$), $a_{i,\,i-1}=-1$ (i четное $\geqslant 3$), $a_{ij}=0$ (для остальных i, j). Соответствующая ему двойная последовательность частных сумм $s_{0j}=(j+1)^2$, $s_{1j}=-(j+1)^2$, $s_{ii}=0$ (i четное), $s_{ii}=1$ (i нечетное >1), $s_{ij}=0$ (остальные i, j). Так как $s_{0j}=(j+1)^2$, то условия теоремы не выполнены.

Покажем, что теорема не имеет места. Действительно:

$$f(x, y)=(1+3y+5y^2+\ldots)-2x(1+3y+5y^2+\ldots)+$$
$$+x^5(1+3y+5y^2+\ldots)+\{x^3y^3(1-x)(1-y)+$$
$$+x^5y^5(1-x)(1-y)+\ldots\}=\left(\frac{1-x}{1-y}\right)^2(1+y)+\frac{x^3y^3(1-x)(1-y)}{1-x^2y^2}.$$

Так как предел второго члена равен нулю, то очевидно, что ни при каком λ $\lim\limits_{(x,\,y)_\lambda\to 1} f(x, y)$ не существует.

Поступило
8 X 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. J. Bromich and G. H. Hardy, Proc. London Math. Soc., **2**, 161 (1904).
[2] I. S. Vignaux, Bolletino della unione matematica italiano, **17**, 209 (1938).
[3] В. Г. Челидзе, ДАН, **53**, № 8 (1946).

* Желательность построения приводимых ниже примеров указана Д. Е. Меньшовым