Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

И. Е. ОГИЕВЕЦКИЙ

О КРИТЕРИЯХ СХОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДВОЙНЫХ РЯДОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 8 X 1947)

В этой заметке устанавливаются условия сходимости выпукло-вогнутых двойных последовательностей и даются их приложения.

Определение. Двойная последовательность $\alpha_{ij}(x)$ называется выпукло-вогнутой на множестве M, если

$$\Delta_{ij}\alpha_{ij}(x) \geqslant 0 \tag{1}$$

для любого $x \subset M$, где

$$\Delta_{ij}\alpha_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{i+1,\,j} - \alpha_{i,\,j+1} + \alpha_{i+1,\,j+1}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Для того чтобы при помощи двойной последовательности* $\alpha_{ij}(x)$ *двойной ряд* $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}(x)$ *с равномерно огарниченными частными суммами преобразовался в ряд* $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}(x)\, u_{ij}(x)$, *сходящийся на данном множестве, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} | \Delta_{ij}\alpha_{ij}(x) \,| < K(x). \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_i\alpha_{in}(x) = 0, \tag{4}$$

$$\lim \Delta_j\alpha_{mj}(x) = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \alpha_{mn}(x) = 0. \tag{6}$$

Как известно [2]:

$$\sum_{i=m}^{p} \Delta_{ij}\alpha_{ij} = \Delta_j\alpha_{mj} - \Delta_j\alpha_{p+1,\,j}, \tag{7}$$

$$\sum_{j=n}^{q} \Delta_{ij}\alpha_{ij} = \Delta_i\alpha_{in} - \Delta_i\alpha_{i,\,q+1}, \tag{8}$$

где

$$\Delta_i \alpha_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{i+1,\, j}, \tag{9}$$

$$\Delta_j \alpha_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{i,\, j+1}. \tag{10}$$

Из (7) и (8) на основании (4 и (5) следует:

$$\sum_{i=m}^{\infty} \Delta_{ij} \alpha_{ij}(x) = \Delta_j \alpha_{mj}(x), \tag{11}$$

$$\sum_{j=n}^{\infty} \Delta_{ij} \alpha_{ij}(x) = \Delta_i \alpha_{in}(x). \tag{12}$$

Тогда преобразование Hardy ([3])

$$\sigma_{pq} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij}(x)\, u_{ij}(x) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{q-1} s_{ij} \Delta_{ij} \alpha_{ij}(x) + \sum_{i=1}^{p-1} s_{iq} \Delta_i \alpha_{iq}(x) + \\ + \sum_{j=1}^{q-1} s_{pj} \Delta_j \alpha_{pj}(x) + s_{pq} \alpha_{pq}(x), \tag{13}$$

на основании (12) и (11), запишется

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij}(x)\, u_{ij}(x) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{q-1} s_{ij} \Delta_{ij} \alpha_{ij}(x) + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=q}^{\infty} s_{iq} \Delta_{ij} \alpha_{ij}(x) + \\ + \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{i=p}^{\infty} s_{pj} \Delta_{ij}\, \alpha_{ij}(x) + s_{pq} \alpha_{pa}(x), \tag{14}$$

откуда и следует сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}(x)\, u_{ij}(x)$.

Докажем необходимость указанных четырех условий (3) — (6). Необходимость первых трех условий следует из теоремы Moore'a ((²), стр. 16) об условиях сходимости рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}(x)\, u_{ij}$, если частные суммы сходящихся рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}$ равномерно ограничены, в которой указанные условия также являются необходимыми.

Покажем необходимость условия (6). Если бы это условие не имело места, тогда существовала бы последовательность чисел m_k, для которой

$$\lim \alpha_{m_k m_k}(x) = l \neq 0.$$

Построим ряд, в котором общий член имеет вид

$$u_{ij} = \begin{cases} (-1)^k, \text{ если } i = j = m_k, \\ 0 \text{ для всех остальных } i \text{ и } j. \end{cases}$$

Частные суммы этого ряда ограничены, но ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}(x)\, u_{ij}(x)$ расходится, так как предел общего члена этого ряда отличен от нуля.

Теорема 2. *Для сходимости ряда* $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}(x)\,u_{ij}(x)$, *где* $\alpha_{ij}(x)$ — *выпукло-вогнутая двойная последовательность и частные суммы* $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}u_{ij}(x)$ *равномерно ограничены на данном множестве* M, *достаточно, чтобы* $\alpha_{ij}(x)$ *была вполне сходящейся последовательностью, предел которой равен нулю, причем*

$$\lim_{m\to\infty}\alpha_{mj}(x)=A, \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{in}(x)=B \tag{16}$$

для всех $x\subset M$.

В самом деле, на основании (1)

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}|\Delta_{ij}\alpha_{ij}(x)|=\alpha_{11}(x)-\alpha_{p+1,1}(x)-\alpha_{1,q+1}+\alpha_{p+1,q+1}(x).$$

Следовательно, имеет место первое условие предыдущей теоремы, а так как $\alpha_{ij}(x)$ вполне сходящаяся последовательность, то имеют место также другие условия предыдущей теоремы.

Нетрудно также доказать следующее предложение.

Теорема 3. *Для равномерной сходимости ряда* $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}(x)\,u_{ij}(x)$ *на замкнутом множестве* M, *где* $\alpha_{ij}(x)$ — *выпукло-вогнутая двойная последовательность непрерывных функций на этом множестве и частные суммы* $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}u_{ij}(x)$ *равномерно ограничены на* M, *достаточно, чтобы* $\alpha_{ij}(x)$ *была последовательностью, вполне равномерно сходящейся к нулю, причем*

$$\lim_{m\to\infty}\alpha_{mj}(x)=A,\qquad \lim_{n\to\infty}\alpha_{in}(x)=B \tag{17}$$

равномерно на множестве M.

Установим предложения об условиях сходимости обобщенных нормальных рядов С. Н. Бернштейна [1].

Определение. Ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}A_{pq}(x)\,x^{p}(1-x)^{q} \tag{18}$$

называется обобщенным нормальным рядом, если он сходится абсолютно и равномерно для $0\leqslant x\leqslant 1$.

Теорема 4. *Ряд* (18) — *обобщенный нормальный, если ряд* $\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{A_{pq}(x)}{x^{p(k-1)}(1-x)^{q(k-1)}}$ *имеет равномерно ограниченные частные суммы, причем* $k>1$.

В самом деле, обозначим $\alpha_{pq} = x^{kp}(1-x)^{kq}$; тогда

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} A_{pq}(x)\, x^p (1-x)^q = \sum\sum \frac{A_{pq}(x)}{x^{p(k-1)}(1-x)^{q(k-1)}}\, x^{kp}(1-x)^{kq}$$

и $\alpha_{pq}(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 на сегменте [0,1].

Теорема 5. *Ряд* (18) — *обобщенный нормальный, если ряд* $\sum\sum|\Delta_{pq}\alpha_{pq}(x)|$ *сходится равномерно и если* $\alpha_{pq}(x)$ *удовлетворяет условиям* (4), (5) *и* (6), *где*

$$\alpha_{pq}(x) = \frac{A_{pq}(x)}{(p+1)\ldots(p+n)(q+1)\ldots(q+n)\, x^{n+1}(1-x)^{n+1}}. \tag{19}$$

В самом деле,

$$\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)(p+2)\ldots(p+n)\, x^i = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\, n!,$$

$$\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)\ldots(q+n)\, y^j = \frac{1}{(1-y)^{n+1}}\, n!,$$

откуда

$$(1-x)^{n+1}(1-y)^{n+1}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)\ldots(q+n)\,(p+1)\ldots(p+n)\, x^i y^j = (n!)^2. \tag{20}$$

Полагая в (20) $y = 1 - x$, находим:

$$\frac{1}{(n!)^2}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}(p+1)\ldots(p+n)(q+1)\ldots(q+n)\, x^{p+n+1}(1-x)^{q+n+1} = \begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & x=0 \text{ и } x=1, \end{cases}$$

а любой ряд (18) можно записать

$$\sum\sum \alpha_{pq}(x)(p+1)\ldots(p+n)(q+1)\ldots(q+n)\, x^{p+n+1}(1-x)^{q+n+1}.$$

Следствие. Ряд (18) — обобщенный нормальный, если $\alpha_{pq}(x)$, определяемое при помощи соотношения (19), — двойная выпукло-вогнутая последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы 3.

Поступило
8 X 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, Math. Ann., **59**, 36 (1904). [2] C. N. Moore, The Theory of Infinite Series, 1937. [3] G. H. Hardy, Proc. London Math. Soc., 1 (1904).