Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

А. МАРКОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 30 X 1947)

1. В 1936 г. Kleen доказал, что всякая общая рекурсивная функция n аргументов представляется в виде

$$P(\mu y(Q(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)), \tag{1}$$

где P — примитивно рекурсивная функция одного аргумента, Q — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов такая, что

$$(x_1, \ldots, x_n)(\exists y)(Q(x_1, \ldots, x_n, y) = 0). \tag{2}$$

Здесь

$$\mu y(\quad)$$

означает наименьшее из чисел y, удовлетворяющих стоящему в скобках условию, и кванторы относятся к совокупности натуральных чисел* [1]. Впоследствии он уточнил этот результат, показав, что примитивно рекурсивная функция P может быть здесь определенным образом фиксирована независимо от представляемой общей рекурсивной функции [2]. Построение такой универсальной функции P, данное Kleen'ом, было весьма сложным.

В 1944 г. Skolem высказал предположение о том, что можно обойтись и без функции P, т. е. что всякая общая рекурсивная функция n аргументов представляется в виде

$$\mu y(Q(x_1, \ldots, x_n, y) = 0),$$

где Q — примитивно рекурсивная функция, удовлетворяющая условию (2) [3]. Он установил простую характеризацию функций, допускающих такое представление, оставив открытым вопрос о совпадении класса этих функций с классом общих рекурсивных функций n аргументов. Этот вопрос был вскоре решен Post'ом в отрицательном смысле [4]. Предположение Skolem'a было таким образом опровергнуто.

В настоящей заметке полностью решается следующий вопрос: какова должна быть примитивно рекурсивная функция P одного аргумента для того, чтобы всякая общая рекурсивная функция n аргументов представлялась в виде (1) с надлежащей (зависящей от пред-

* Натуральными числами считаются числа 0, 1, 2...

ставляемой функции) примитивно рекурсивной функцией Q от $n+1$ аргументов, удовлетворяющей условию (2)?

Цитированный выше результат Kleen'a показывает, что такие функции P существуют, а из упомянутого результата Post'a следует, что далеко не все примитивно рекурсивные функции одного аргумента таковы. Естественно поэтому спросить, что это за функции.

2. Определение 1. Будем говорить об арифметической функции* F одного аргумента, что она есть функция большого размаха, если всякое натуральное число фигурирует в качестве ее значения бесконечное множество раз, т. е. если

$$(x, y)(\exists z)(z > x \,\&\, F(z) = y).$$

Определение 2. Будем говорить об арифметической функции P одного аргумента, что она универсальна для n аргументов, если она примитивно рекурсивна и всякая общая рекурсивная функция n аргументов представляется в виде (1), где Q — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов, удовлетворяющая условию (2).

Теорема. *Для того чтобы примитивно рекурсивная функция одного аргумента была универсальной для n аргументов, необходимо и достаточно, чтобы она была функцией большого размаха.*

Заметим, что примитивно рекурсивные функции большого размаха строятся легко. Таким образом, наша теорема является значительным усилением упомянутых результатов Kleen'a и Post'a.

Поступило
30 X 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. C. Kleen, Math. Ann., **112**, 727 (1936). [2] S. C. Kleen, Trans. Amer. Math. Soc., **53**, 41 (1943). [3] Th. Skolem, Norske Vid. Selsk. Forh., **17**, No. 22, 89 (1922); No. 26, 103. [4] E. L. Post, J. Symb. Logic, **11**, 73 (1946).

* Под арифметической функцией одного аргумента мы понимаем функцию, определенную в совокупности натуральных чисел и принимающую лишь натуральные числа в качестве значений.