Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

А. ЛЯПУНОВ

ОБ R-МНОЖЕСТВАХ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 16 IX 1947)

Развитие теории A-множеств и проективных множеств второго класса в значительной мере обусловлено тем, что A-операция или операция решета допускает определение трансфинитных индексов, обладающих многими ценными свойствами, в частности, удовлетворяющих принципу сравнения индексов ([1], [2]).

Очередная задача дескриптивной теории множеств состоит в выделении таких теоретико-множественных операций, которые допускают построение аналогичных индексов, и в изучении строения множеств и классов множеств, доставляемых этими операциями.

В настоящей заметке сообщается ряд результатов, относящихся к этому вопросу. Оказывается, что R-операции, определенные А. Н. Колмогоровым и изученные с общей теоретико-операционной точки зрения Е. М. Левенсоном и Л. В. Канторовичем ([3]), обладают индексами, очень близкими к индексам A-операции. С их помощью удается установить ряд фактов, обобщающих значительную часть теории A-множеств. Мы воспроизведем определение R-операции, опишем построение индексов и построение R-множеств и сформулируем основные результаты, полученные описанным аппаратом*.

1. R-операции. Множества натуральных чисел мы будем называть цепями; конечные упорядоченные множества натуральных чисел — кортежами (среди прочих всегда считается и пустой кортеж ( )); множества кортежей — цепями кортежей; множества произвольных элементов, занумерованных всевозможными кортежами,— таблицами.

Пусть дана произвольная таблица множеств цепей $\mathfrak{N}=\{N_{n_1\ldots n_k}\}$. Цепь кортежей $\vartheta=\{(n_1\ldots n_k)\}$ мы назовем $R_{\mathfrak{N}}$-цепью, если она имеет следующие свойства: 1) $(\ )\in\vartheta$; 2) если кортеж $(n_1\ldots n_k)\in\vartheta$ и $\eta=\{n_{k+1}\}$, где $(n_1\ldots n_k\, n_{k+1})\in\vartheta$, то $\eta\in N_{n_1\ldots n_k}$. Множество $R_{\mathfrak{N}}$-цепей мы обозначим $\theta_{\mathfrak{N}}$. Тогда R-операция с базой $\mathfrak{N}$ определяется так:

$$R_{\mathfrak{N}}(\{E_{n_1\ldots n_k}\})=\sum_{\vartheta\in\theta_{\mathfrak{N}}}\ \prod_{(n_1\ldots n_k)\in\vartheta} E_{n_1\ldots n_k},$$

где $\mathscr{E}=\{E_{n_1\ldots n_k}\}$ — произвольная таблица множеств.

Множество $\prod\limits_{(n_1\ldots n_k)\in\vartheta} E_{n_1\ldots n_k}$ называется ядром таблицы $\mathscr{E}$, отвечающим ϑ.

---

* Пользуюсь случаем, чтобы выразить глубокую благодарность П. С. Новикову, обратившему мое внимание на эти вопросы.

2*

R^*-операция с базой $\mathfrak{N}$ определяется так. Положим

$$E^0_{n_1\ldots n_k}=E_{n_1\ldots n_k},\qquad \overline{E}^\alpha_{n_1\ldots n_k}=E^\alpha\cdot E^\alpha_{n_1}\cdot\ldots\cdot E^\alpha{}_{n_1\ldots n_k},$$

$$E^{\alpha+1}_{n_1\ldots n_k}=\underset{n_{k+1}}{\Phi_{N_{n_1\ldots n_k}}}(\{\overline{E}^\alpha_{n_1\ldots n_k}\})$$

и, если γ второго рода, то $E^\gamma_{n_1\ldots n_k}=\prod\limits_{\beta<\gamma}E^\beta_{n_1\ldots n_k}$. Тогда

$$R^*_\mathfrak{N}(\{E_{n_1\ldots n_k}\})=E^\Omega=\prod_{\alpha<\Omega}E^\alpha.$$

Теорема 1. $R_\mathfrak{N}(\{E_{n_1\ldots n_k}\})=R^*_\mathfrak{N}(\{E_{n_1\ldots n_k}\})$.

2. Индексы. Наибольшее число $\alpha\leqslant\Omega$ такое, что $x\in E^\alpha$, мы назовем $\mathfrak{N}$-индексом таблицы $\mathscr{E}$ в точке x и будем обозначать его $\mathrm{Ind}_\mathfrak{N}(x/\mathscr{E})$. Ясно, что $E^\Omega=[\mathrm{Ind}_\mathfrak{N}(x/\mathscr{E})=\Omega]$ и $E^\alpha-E^{\alpha+1}=[\mathrm{Ind}_\mathfrak{N}(x/\mathscr{E})=\alpha]$. Положим $E^\Omega_{n_1\ldots n_k}=\prod\limits_{\alpha<\Omega}E^\alpha_{n_1\ldots n_k}$. Пусть $x\in E^\Omega$. Наименьшее число $\alpha<\Omega$ такое, что $x\in E^\alpha_{n_1\ldots n_k}$ тогда и только тогда, когда $x\in E^\Omega_{n_1\ldots n_k}$, каков бы ни был кортеж $(n_1\ldots n_k)$, мы назовем внутренним $\mathfrak{N}$-индексом таблицы $\mathscr{E}$ в точке x и будем обозначать его $\mathrm{Ind}_\mathfrak{N}\,\mathrm{int}(x/\mathscr{E})$.

Ясно, что, изменив нумерацию множеств таблицы $\mathscr{E}$, можно придать операции $R_\mathfrak{N}$ вид некоторой δs-операции.

Теорема 2. *Множества вида* $[\mathrm{Ind}_\mathfrak{N}\,\mathrm{int}(x/\mathscr{E})=\alpha]$ *и* $[\mathrm{Ind}_\mathfrak{N}(x/\mathscr{E})=\alpha]$, *где* $\alpha<\Omega$, *представимы с помощью операций* Π, Σ, C *и* $\Phi_{N_{n_1\ldots n_k}}$, *исходя из множеств* $\{E_{n_1\ldots n_k}\}$.

Таким образом, множества $R_\mathfrak{N}(\{E_{n_1\ldots n_k}\})$ и $CR_\mathfrak{N}(\{E_{n_1\ldots n_k}\})$ являются суммами $\aleph_1$ множества, получаемого операциями Π, Σ, C и $\Phi_{N_{n_1\ldots n_k}}$ из множеств $\{E_{n_1\ldots n_k}\}$.

3. Мера и категория. Мы будем говорить, что теоретико-множественная операция сохраняет измеримость или сохраняет свойство Бэра, если она приводит к множествам измеримым или обладающим свойством Бэра, когда ее применяют к множествам, обладающим теми же свойствами.

Теорема 3. *Если все операции* $\Phi_{N_{n_1\ldots n_k}}$ *сохраняют измеримость (или свойство Бэра), то и операция* $R_\mathfrak{N}$ *сохраняет это свойство. В этом случае для всякой таблицы* $\mathscr{E}$ *измеримых множеств (или для всякого совершенного множества* P *и всякой таблицы* $\mathscr{E}$ *множеств, имеющих свойство Бэра) найдется число* $\beta<\Omega$ *такое, что* $\mathrm{mes}[\Omega>\mathrm{Ind}_\mathfrak{N}(x/\mathscr{E})>\beta]=0$ *и* $\mathrm{mes}[\mathrm{Ind}_\mathfrak{N}\,\mathrm{int}(x/\mathscr{E})>\beta]=0$ *(или такое, что множества, упомянутые выше, первой категории на* P*)*.

Аналогичная теорема верна, если рассматривать вместо измеримых множеств дескриптивно-измеримые.

4. R_α-классы. Если каждое из множеств $N_{n_1\ldots n_k}$ является базой операции Σ, то операция $R_\mathfrak{N}$ обращается в A-операцию. Мы назовем ее R^0-операцией. Пусть определена R^α-операция. Обозначим через R^α_C дополнительную операцию, определяемую равенством $R^\alpha_C(\{E_{n_1\ldots n_k}\})=CR_\alpha(\{CE_{n_1\ldots n_k}\})$. Через N^α и N^α_C обозначим базы δs-операций, эквивалентных R^α и R^α_C. Если $N=N_{n_1\ldots n_{2k}}=N^\alpha$ и

$N_{n_1 \ldots n_{2k+1}} = N^{\alpha}_{C}$ для всех кортежей, то операцию $R_{\mathfrak{N}}$ мы назовем $R^{\alpha+1}$-операцией. Если γ второго рода, то R^{γ} эквивалентна R над $\prod\limits_{\beta<\gamma} R^{\beta}$.

Таким образом, R^{α}- и R^{α}_{C}-операции определены для всех $\alpha < \Omega$. Базу операции R^{α} мы будем обозначать $\mathfrak{N}^{\alpha}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать множества, лежащие в пространстве Бэра. Множества, получаемые R^{α}-операцией, исходя из B-множеств, образуют класс R_{α}. Дополнения к ним — класс CR_{α}-множеств. Общая часть классов R_{α} и CR_{α} — класс BR_{α}. Классы A-, CA- и B-множеств совпадают, соответственно, с классами R_0-, CR_0- и BR_0-множеств. Класс R_1 содержит все C-множества. Класс CR_{α} всегда входит в класс $R_{\alpha+1}$. Совокупность всех множеств, входящих в классы R_{α}, образует класс R-множеств. Из теорем 1—3 следует, что *все R-множества измеримы и обладают свойством Бэра (а также дескриптивно измеримы). Кроме того, они допускают такие представления в виде сумм $\aleph_1$ B-множества, что сумма всех этих слагаемых, кроме счетного числа, имеет меру нуль или первую категорию на заданном совершенном множестве. Аналогичный факт верен и для дескриптивной измеримости.*

Если класс R_{α} инвариантен относительно некоторой теоретико-множественной операции, то мы будем говорить, что эта операция слабее R^{α}-операции.

Теорема 4. *Операции* Π, Σ, $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$, R^{β}, *где* $\beta \leqslant \alpha$, *и* R^{β}_{C}, *где* $\beta < \alpha$, *слабее, чем R^{α}-операция.*

Теорема 5. *Пусть* $\mathscr{E}' = \{E'_{n_1 \ldots n_k}\}$ *и* $\mathscr{E}'' = \{E''_{n_1 \ldots n_k}\}$ *две таблицы BR_{α}-множеств. Тогда множество* $[\mathrm{Ind}_{\mathfrak{N}^{\alpha}}(x/\mathscr{E}') \geqslant \mathrm{Ind}_{\mathfrak{N}^{\alpha}}(x/\mathscr{E}'')]$ *входит в класс R_{α}.*

Эта теорема является полным аналогом принципа сравнения индексов (принципа отражения) П. С. Новикова. Она является основным инструментом во всем дальнейшем.

Теорема 6. *Класс R-множеств входит в класс проективных множеств B_2.*

5. Отделимость и неотделимость.

Теорема 7. *Два непересекающихся R_{α} множества отделимы BR_{α}-множествами.*

Теорема 8. *Если у двух R_{α}-множеств удалить их общую часть, оставшиеся части отделимы CR_{α}-множествами.*

Теорема 9. *Для всякого $\alpha < \Omega$ существуют два непересекающихся CR_{α}-множества, не отделимых BR_{α}-множествами.*

Если M — некоторое множество цепей, то через M^n мы обозначим множество всех цепей, входящих в M и содержащих число n.

Теорема 10. *Если все операции Φ_{M^n} слабее, чем R^{α}, то для всякой системы R_{α}-множеств такой, что $\Phi_M(\{E_n\}) = 0$ найдется система BR_{α}-множеств $\{H_n\}$ такая, что $H_n \supset E_n$ и $\Phi_M(\{H_n\}) = 0$.*

Теорема 11. *Если все операции Φ_{M^n} слабее, чем R^{α}, и $\{E_n\}$ — произвольная система R^{α}-множеств, то найдется система $\{H_n\}$ CR_{α}-множеств такая, что $H_n \supset E_n - \Phi_{M^n}(\{E_{n'}\})$ и $\Phi_M(\{H_n\}) = 0$.*

Теорема 12. *Для всякого $\alpha < \Omega$ существует система R_{α}-множеств $\{E_n\}$ такая, что $\Phi_{N^{\alpha}_{C}}(\{E_n\}) = 0$ и, каковы бы ни были BR_{α}-множества $\{H_n\}$ такие, что $H_n \supset E_n$, непременно $\Phi_{N^{\alpha}_{C}}(\{H_n\}) \neq 0$.*

Теорема 13. *Для всякого $\alpha < \Omega$ существует система CR_α-множеств $\{E_n\}$ такая, что, каковы бы ни были CR_α-множества $\{H_n\}$ такие, что $H_n \supset E_n - \Phi_{N^{\alpha n}}(\{E_{n'}\})$, непременно $\Phi_{N^\alpha}(\{H_n\}) \neq 0$.*

6. Точки однозначности. Пусть Φ_M — некоторая δs-операция. Цепь $\eta \in M$ называется минимальной, если она не содержит другой цепи $\eta' \in M$. Операцию, допускающую базу, состоящую из одних только минимальных цепей, называют жесткой (4). База, состоящая из одних лишь минимальных цепей, также называется жесткой.

Теорема 14. *Все операции R^α и R_C^α являются жесткими.*

Точка x называется точкой $\mathfrak{R}$-однозначности таблицы множеств $\mathcal{E}$, если она входит в одно единственное ядро таблицы $\mathcal{E}$, отвечающее минимальной $R_{\mathfrak{R}}$-цепи.

Теорема 15. *Множество точек $\mathfrak{R}^\alpha$-однозначности любой таблицы BR_α-множеств является CR_α-множеством.*

Следствие. *Если таблица $\mathcal{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ состоит из BR_α-множеств и всякая точка множества $U = R^\alpha(\{E_{n_1 \ldots n_k}\})$ является точкой $\mathfrak{R}^\alpha$-однозначности таблицы $\mathcal{E}$, то U есть BR_α-множество.*

Теорема 16. *Если $\mathcal{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ есть таблица R^α-множеств и множество $R^\alpha(\{E_{n_1 \ldots n_k}\})$ состоит из одних только точек $\mathfrak{R}^\alpha$-однозначности таблицы $\mathcal{E}$, то существует таблица $\mathcal{E}' = \{H_{n_1 \ldots n_k}\}$ BR_α-множеств такая, что $H_{n_1 \ldots n_k} \supset E_{n_1 \ldots n_k}$ и множество $R^\alpha(\{H_{n_1 \ldots n_k}\})$ состоит из одних только точек $\mathfrak{R}^\alpha$-однозначности таблицы $\mathcal{E}'$.*

7. Строение класса BR_α. Обозначим $\mathfrak{B}R_\alpha$ класс множеств, которые могут быть получены трансфинитным применением операций Φ_{N^β} и $\Phi_{N_C^\beta}$, где $\beta < \alpha$, исходя из B-множеств.

Класс $\mathfrak{B}R_0$ совпадает с классом B-множеств, класс $\mathfrak{B}R_1$ — с классом C-множеств.

Теорема 17. *Если $\alpha > 0$ и первого рода, то существует BR_α-множество, универсальное для всех $\mathfrak{B}R_\alpha$-множеств.*

Теорема 18. *Если $\alpha > 0$ и первого рода, то существуют две таблицы BR_α-множеств $\mathcal{E}' = \{E'_{n_1 \ldots n_k}\}$ и $\mathcal{E}'' = \{E''_{n_1 \ldots n_k}\}$ такие, что $R^\alpha(\{E'_{n_1 \ldots n_k}\}) \cdot R^\alpha(\{E''_{n_1 \ldots n_k}\}) = 0$ и $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{R}^\alpha}(x/\mathcal{E}')$ не ограничен на множестве $R^\alpha(\{E'_{n_1 \ldots n_k}\})$.*

Теоремы 7—13, 15—18 могут быть распространены на классы множеств, получаемые трансфинитным применением операций R^α и R_C^α (при $\alpha = \mathrm{const}$), исходя из B-множеств.

Замечание. Все изложенные результаты были известны для случая R_0-множеств (A-множеств). Теоремы 1—9, 15 и 16 содержатся в книге Н. Н. Лузина (5); теорема 14 — у Ю. С. Очана (4); теоремы 10—13 в моей статье (6).

R_1-множества были построены А. Н. Колмогоровым, им же было показано, что они измеримы и обладают свойством Бэра. Л. В. Канторович и Е. М. Левенсон показали, что R_1-множества входят в класс B_2. В их работе по существу содержится теорема 4 (3).

Поступило
16 IX 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Novikoff, Fund. Math., **17**, 8 (1931). [2] П. С. Новиков, Изв. АН СССР, сер. мат., № 2 (1937). [3] L. Kantorovitch and E. Levenson, Fund. Math., **20**, 54 (1933). [4] Ю. С. Очан, Матем. сб., **10** (52) : 3, 151 (1942). [5] N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, 1930. [6] А. А. Ляпунов, ДАН, **53**, № 5 (1946).