Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

П. П. КОРОВКИН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО ПЛОЩАДИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 VII 1947)

Пусть C — замкнутый аналитический контур, d — внутренняя область и D — внешняя область, ограниченные кривой C.

Пусть $x=\psi(z)=cz+c_0+\frac{c_1}{z}+\ldots$, $c>0$,— функция, конформно отображающая область $|z|>1$ на область d, и $z=\delta(x)$ — обратная функция. Функция $\psi(z)$ регулярна и однолистна при $|z|>\rho$, где $\rho<1$.

Пусть $f(x)$ — функция, аналитическая в области $|\delta(x)|>r\geqslant\rho$, $r<1$, и не имеет там нулей.

Обобщенные полиномы Фабера $\Phi_n(x, 1/f)$, порожденные функциями $\delta^n(x)/f(x)$, имеют представление

$$\Phi_n\left(x, \frac{1}{f}\right)=\frac{\delta^n(x)}{f(x)}+\varepsilon_n[\delta(x)], \quad |\delta(x)|>r, \tag{1}$$

где

$$\varepsilon_n[\delta(x)]=o(r_1^n), \quad r_1>r \quad (^1). \tag{2}$$

Пусть функция $\rho(x)$ удовлетворяет условиям: 1) $\rho(x)$ — неотрицательная суммируемая функция в области d; 2) $\rho(x)=|f(x)\delta'(x)|^2$ при $r<|\delta(x)|<1$.

Полиномы $q_n(x)$, $n=0,1,\ldots$, определяются единственным образом следующими двумя свойствами; 1) старший коэффициент полинома $q_n(x)$ положителен; 2) выполнены условия

$$\int\limits_d \rho(x)q_n(x)\overline{q_m(x)}\,d\sigma=\varepsilon_{n,m}=\begin{cases}0, & \text{если } n\neq m,\\ 1, & \text{если } n=m.\end{cases}$$

Пусть $1/\lambda_n$ — старший коэффициент полинома $q_n(x)$ и $B_n(x)=x^n+b_1^{(n)}x^{n-1}+\cdots+b_n^{(n)}$. Очевидно, имеем

$$\lambda_n^2\leqslant\int\limits_d \rho(x)|B_n(x)|^2\,d\sigma. \tag{3}$$

Пусть S_{r_0} — кольцо $r_0\leqslant|\delta(x)|<1$ и d_{r_0} — область, ограниченная кривой $|\delta(x)|=r_0>r$. Так как старший коэффициент полинома $\Phi_n(x, 1/f)$ равен $1/f(\infty)c^n$, то, в силу (3), получаем

$$\frac{\lambda_n^2}{f^2(\infty)c^{2n}} \leqslant \int_d \rho(x)\left|\Phi_n\left(x, \frac{1}{f}\right)\right|^2 d\sigma = \int_{d_{r_0}} \rho(x)\left|\Phi_n\left(x, \frac{1}{f}\right)\right|^2 d\sigma +$$

$$+\int_{S_{r_0}} \rho(x)\left|\Phi_n\left(x, \frac{1}{f}\right)\right|^2 d\sigma. \tag{4}$$

Полагая $r_0 < r_1$ и принимая во внимание (1) и (2), получим:

$$\Phi_n\left(x, \frac{1}{f}\right) = o(r_1^n), \quad |\delta(x)| = r_0. \tag{5}$$

Соотношение (5) будет иметь место и в области d_{r_0}. В силу этого получаем

$$\int_{d_{r_0}} \rho(x)\left|\Phi_n\left(x, \frac{1}{f}\right)\right|^2 d\sigma = o(r_1^{2n}). \tag{6}$$

Далее, находим

$$\int_{S_{r_0}} \rho(x)\left|\Phi_n\left(x, \frac{1}{f}\right)\right|^2 d\sigma = \int_{S_{r_0}} \left|f(x)\,\delta'(x)\,\Phi_n\left(x, \frac{1}{f}\right)\right|^2 d\sigma =$$

$$= \int_{r_0 \leqslant |z| \leqslant 1} \left|f[\psi(z)]\,\Phi_n\left[\psi(z), \frac{1}{f}\right]\right|^2 d\omega = \int_{r_0 \leqslant |z| \leqslant 1} |z^n + \varepsilon_n(z) f[\psi(z)]|^2 \, d\omega =$$

$$= \int_0^1 r^{2n+1}\, dr \left\{2\pi + \int_{|z|=r} \left|\frac{\varepsilon_n(z) f[\psi(z)]}{z^n}\right|^2 d\theta\right\} =$$

$$= \int_0^1 \left\{2\pi + \frac{o(r_1^{2n})}{r^{2n}}\right\} r^{2n+1}\, dr = \frac{\pi}{n+1} + o(r_1^{\,n}). \tag{7}$$

Из (4), (6) и (7) находим

$$\lambda_n^2 \leqslant f^2(\infty)\, c^{2n}\left(\frac{\pi}{n+1} + o(r_1^{2n})\right). \tag{8}$$

С другой стороны,

$$1 = \int_d \rho(x)\,|q_n(x)|^2\, d\sigma = \int_{S_{r_0}} |f(x)\,\delta'(x)\, q_n(x)|^2\, d\sigma =$$

$$= \int_{r_0}^1 r^{2n+1}\, dr \int_{|z|=r} \left|\frac{f[\psi(z)]\, q_n[\psi(z)]}{z^n}\right|^2 d\theta \geqslant 2\pi \frac{f^2(\infty)\, c^{2n}}{\lambda_n^2}\left(\frac{1}{2n+2} - \frac{r_0^{2n+2}}{2n+2}\right). \tag{9}$$

Сравнивая (8) и (9), получим

$$\lambda_n^2 = \frac{\pi}{n+1} f^2(\infty)\, c^{2n}\,(1 + o(r_1^{2n})). \tag{10}$$

Функция $\varphi_n(z) = \frac{f[\psi(z)]\, q_n[\psi(z)]}{z^n}$ регулярна в области $|z| > r$. Пусть

$$\varphi_n(z)=\frac{f(\infty)\,c^n}{\lambda_n}+\frac{a_1^{(n)}}{z}+\frac{a_2^{(n)}}{z^2}+\dots$$

разложение этой функции по степеням $1/z$. Из очевидного неравенства

$$\int\limits_{|z|=r<1}|\varphi_n(z)|^2 d\theta=2\pi\left\{\frac{f^2(\infty)\,c^{2n}}{\lambda_n^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_k^{(n)}}{r^k}\right|^2\right\}\geqslant 2\pi\left\{\frac{f^2(\infty)\,c^{2n}}{\lambda_n^2}+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k^{(n)}|^2\right\},$$

(9) и (10) легко получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k^{(n)}|^2=o\,(r_1^{2n}) \tag{11}$$

и, в силу неравенства Шварца,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_k^{(n)}}{z^k}\right|\leqslant\sqrt{\frac{\Sigma\,|a_k^{(n)}|^2}{|z|^2-1}}=o\,(r_1^n),\quad z>1. \tag{12}$$

Из определения функции $\varphi_n(z)$ и последнего соотношения следует

$$q_n[\psi(z)]=\frac{f(\infty)\,c^n}{\lambda_n}\,\frac{z^n}{f[\psi(z)]}(1+o\,(r_1^n)). \tag{13}$$

Принимая во внимание (10) и переходя на плоскость x, будем иметь:

$$q_n(x)=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,\frac{\delta^n(x)}{f(x)}(1+o\,(r_1^n)),\quad |\delta(x)|>1. \tag{14}$$

Полагая $|\delta(x)|=r_2>1$, получим

$$q_n(x)-\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,\Phi_n\left(x,\frac{1}{f}\right)=o\,(r_1^n r_2^n),\quad |\delta(x)|=r_2>1.$$

Последнее соотношение будет иметь место и внутри кривой $|\delta(x)|=r_2$.

Так как $r_1>r$ произвольно и $r_2>1$ произвольно, то

$$q_n(x)=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,\Phi_n\left(x,\frac{1}{f}\right)+o\,(r_1^n)=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,\frac{\delta^n(x)}{f(x)}+o\,(r_1^n),\ r_1>r. \tag{15}$$

Соотношениями (14) и (15) дается асимптотическое представление полиномов $q_n(x)$ в области $|\delta(x)|>r$.

Заметим, что из (15) легко следует

Теорема. *Рядами полиномов $q_n(x)$ могут быть представлены все функции, регулярные в замкнутой области $\bar{d}_r$, являющейся частью области d, и такое представление единственно.*

Поступило
14 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Коровкин, Матем. сб., 9, в. 3 (1941).