Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII. № 9

МАТЕМАТИКА

А. А. ГЛАГОЛЕВ

О ПОСТРОЕНИИ ТОЧЕК БУРМЕСТРА

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 11 IX 1947)

Вопрос о построении точек Бурместра, естественно, можно свести к построению конического сечения S, проходящего через 4 точки Бурместра и один из десяти полюсов, так как, построив две из десяти возможных здесь кривых S, мы определим точки Бурместра.

Насколько нам известно, такой способ построения точек Бурместра впервые был предложен в 1938 г. Hackmüller'ом ([1]), который сперва, при помощи длительных аналитических выкладок, устанавливает правило построения 4 и только 4 точек упомянутого выше конического сечения S, а затем по найденным 4 точкам и выбранному полюсу строит S уже обычным линейным способом.

Легко видеть, однако, что такой способ построения кривой S имеет тот существенный недостаток, что если не все 4 точки, о которых идет речь выше, окажутся в пределах чертежа, то мы неизбежно, как это и случается иногда на практике, должны прибегнуть к нежелательным дополнительным построениям.

Естественно поэтому найти более общий способ построения конического сечения S, свободный от указанного выше недостатка и позволяющий, следовательно, непосредственно построить достаточное число точек кривой S, лежащих в пределах чертежа.

В настоящей заметке и дается такой более общий способ построения конического сечения S, причем обнаруживается, что способ Hackmüller'а является лишь частным случаем приводимого ниже.

Для сравнения обоих способов мы даем построение того самого конического сечения S, проходящего через полюс P_{13}, построение которого по Hackmüller'у приводится в ([2]).

Задача. Построить коническое сечение S, проходящее через точки Бурместра и полюс P_{13}.

Решение. Берем три пары полюсов P_{12}, P_{23}; P_{14}, P_{34}; P_{15}, P_{35} и через первую пару точек проводим две произвольные окружности C_1, C_2, а через вторую и третью пары точек проводим, соответственно, окружности C_1', C_2' и C_1'', C_2'' таким образом, чтобы дуги окружностей C_1, C_1', C_1'', стягиваемые хордами $P_{12}P_{23}$, $P_{14}P_{34}$, $P_{15}P_{35}$, имели равное число радианов и чтобы дуги окружностей C_2, C_2', C_2'', стягиваемые теми же хордами, обладали той же особенностью.

Тогда искомой кривой S будет коническое сечение O_1O_2ABC, где O_1 и O_2 — радикальные центры окружностей C_1, C_1', C_1'' и C_2, C_2', C_2'', а A, B, C — точки пересечения радикальных осей окружностей C_1, C_1' и C_2, C_2'; C_1, C_1'' и C_2, C_2''; C_1', C_1'' и C_2', C_2''.

В самом деле, если мы будем через точки P_{12}, P_{23} проводить новые окружности C_3, C_4, C_5, ... и строить указанным выше способом новые окружности C_3', C_4', C_5', ... и C_3'', C_4'', C_5'', ... и новые точки O_3, O_4, O_5, ..., то мы, очевидно, получим три проективных пучка окружностей (C_1, C_2); (C_1', C_2'); (C_1'', C_2'') и три проективных им пучка прямых с центром в A, B, C, причем C_1, C_2, C_3, ...; C_1', C_2', C_3', ...; C_1'', C_2'', C_3'', ...; AO_1, AO_2, AO_3, ...; BO_1, BO_2, BO_3, ...; CO_1, CO_2, CO_3, ... будут соответствующими элементами этих шести проективных пучков.

Так как проективные пучки окружностей (C_1, C_2), (C_1', C_2'), (C_1'', C_2''), взятые попарно, определяют три кривые Бурместра, проходящие через точки Бурместра и полюс P_{13}, то понятно, что и проективные пучки прямых (A), (B), (C) определяют коническое сечение S, проходящее через те же 5 точек, а это и доказывает справедливость приведенного выше построения кривой S.

Из сказанного выше ясно также, что положение точек A, B, C не зависит от выбора окружностей C_1, C_2, C_3, C_4, ..., между тем как положение точек O_1, O_2, O_3, O_4, ... однозначно определяется выбором окружностей C_1, C_2, C_3, C_4, ... и, следовательно, выбирая подходящим образом окружности C_1, C_2, C_3, C_4, ..., мы можем всегда построить достаточное число точек O_1, O_2, O_3, O_4, ... конического сечения S, лежащих в пределах чертежа.

Заметим в заключение, что если мы за окружность C_3 выберем окружность, состоящую из прямой $P_{12}P_{23}$ и бесконечно удаленной прямой плоскости, а за окружность C_4 выберем окружность, описанную на отрезке $P_{12}P_{23}$ как на диаметре, то в этом частном случае точки O_3, O_4 вместе с точками A и B будут теми единственными 4 точками конического сечения S, которые позволяют построить аналитический метод Hackmüller'а.

Прямые же AO_3, AO_4, BO_3, BO_4 в этом частном случае будут теми самыми прямыми, из анализа уравнений которых упомянутый автор получает и способ их построения, отличный от приведенного выше.

Поступило
4 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Hackmüller, Z. angew. Math. u. Mech., Aug. 18 252 (1938); Maschinenbau, Dez. (1938). [2] И. И. Артоболевский, З. Ш. Блох и В. В. Добровольский, Синтез механизмов, 1944, стр. 197.