Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

НОРМАЛЬНЫЕ ПОДСИСТЕМЫ КОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ АССОЦИАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 VII 1947)

В настоящей статье доказывается, что нормальные подсистемы конечной симметрической ассоциативной системы совпадают с нормальными делителями симметрической группы той же степени. Исследования, показывающие важность понятия нормальной подсистемы, даны в статье Е. С. Ляпина [1].

Определения и обозначения.

1. Подстановку n символов, имеющую в нижней строке не все переставляемые символы, назовем несобственной.

2. Число символов, не вошедших в нижнюю строку подстановки, назовем ее дефектом.

3. Множество всех подстановок n символов (включая несобственные) назовем симметрической ассоциативной системой степени n и обозначим через C_n.

4. Нормальной подсистемой $\mathfrak{N}$ ассоциативной системы $\mathfrak{G}$ назовем подсистему $\mathfrak{N}$, для которой при любых A, B и N

$$A \in \mathfrak{G} \& B \in \mathfrak{G} \& N \in \mathfrak{N} \rightarrow (ANB \in \mathfrak{N} \longleftrightarrow AB \in \mathfrak{N}).$$

Этот факт мы обозначим через $\mathfrak{N} ((\mathfrak{G}$.

5. $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{A}_n$ означают в дальнейшем симметрическую и знакопеременную группы степени n. Символом E обозначается тождественная подстановка.

Теорема. *C_n имеет нетривиальными нормальными подсистемами при $n \geqslant 5$ только $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{A}_n$.*

Доказательство будет состоять из ряда лемм, имеющих отчасти и самостоятельное значение (очевидные леммы приведены без доказательств).

Лемма 1. *Дефект произведения двух подстановок не меньше дефекта каждого из сомножителей.*

Лемма 2. *Если дефект подстановки P равен k, а подстановки S нулю, то подстановки PS и SP имеют дефект k.*

Лемма 3. $\mathfrak{S}_n ((C_n \& \mathfrak{A}_n ((C_n$.

Доказательство.

$$AB \in \mathfrak{S}_n \longleftrightarrow A \in \mathfrak{S}_n \& B \in \mathfrak{S}_n,$$

$$ASB \in \mathfrak{S}_n \longleftrightarrow A \in \mathfrak{S}_n \& B \in \mathfrak{S}_n \& S \in \mathfrak{S}_n,$$

поэтому

$$(AB \in \mathfrak{S}_n \longleftrightarrow ASB \in \mathfrak{S}_n) \longleftrightarrow \mathfrak{S}_n ((C_n.$$

Вторая часть леммы доказывается аналогично.

Лемма 4. *Если подсистема $\mathfrak{H} \subset C_n$ содержит дважды транзитивную подгруппу $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{S}_n$ и хоть одну подстановку H ненулевого дефекта, то $\mathfrak{H}$ содержит все подстановки дефекта $n-1$.*

Доказательство. Не нарушая общности (так как нумерация переставляемых символов зависит от нас), можно считать

$$H=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & \delta & \delta+1 & \dots & n\\ \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \beta & \dots & \nu\end{pmatrix},$$

где $\delta > 1$.

Пусть $D \in \mathfrak{D}$. Можно положить

$$D=\begin{pmatrix}\dots & \alpha & \dots & \beta & \dots\\ \dots & 1 & \dots & 2 & \dots\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$HDH=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & \delta & \delta+1 & \dots & n\\ \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \alpha & \dots & \nu'\end{pmatrix}.$$

При этом $HDH \in \mathfrak{H}$ и в нижней ее строке символ α встречается большее число раз, чем в H.

Так как число переставляемых символов конечно, то, повторяя процесс нужное число раз, мы придем к подстановке

$$H'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha\end{pmatrix}.$$

В силу транзитивности $\mathfrak{D}$ в ней найдется подстановка, переводящая символ α в любой заданный. Умножая эту подстановку на H', получаем требуемое.

Лемма 5. *Если $\mathfrak{R} \Subset C_n$ и $\mathfrak{R}$ содержит все подстановки дефекта $n-1$, то $\mathfrak{R} = C_n$.*

Доказательство. Пусть $O_1, O_2, \dots, O_n$ — подстановки дефекта $n-1$. Тогда, при любых A и B из C_n, $AO_iB=O_j \in \mathfrak{R}$. Значит, все $AB \in \mathfrak{R}$ и, в частности, все $AE=A \in \mathfrak{R}$, т. е. $C_n=\mathfrak{R}$.

Если $\mathfrak{R} \Subset C_n$, то [1] $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}_n \Subset \mathfrak{S}_n$, что, как известно, возможно лишь в трех случаях ($n>4$): 1) $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}_n=\mathfrak{S}_n$; 2) $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}_n=\mathfrak{A}_n$; 3) $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}_n=E$. Но, так как при этом $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{A}_n$ дважды транзитивны, то, в силу лемм 4 и 5, случаи 1 и 2 имеют место только при $\mathfrak{R}=\mathfrak{S}_n$ (мы предполагаем, что $\mathfrak{R} \not\subset \mathfrak{S}_n$).

Остается случай 3. Пусть φ — гомоморфизм C_n с ядром $\mathfrak{R}$. Очевидно, $\varphi(\mathfrak{S}_n)$ есть группа. Ядро $\varphi(\mathfrak{S}_n)$ есть $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}_n$, т. е. единично, и гомоморфизм оказывается изоморфизмом. Не нарушая общности, этот изоморфизм можно считать тождественным. $\mathfrak{R}$-класс, содержащий данное $S_0 \in \mathfrak{S}_n$, назовем $\mathfrak{R}_{S_0}$-классом. Очевидно, $\varphi(\mathfrak{R}_s)=\varphi(S)=S$.

Лемма 6. *$\mathfrak{R}_S=\mathfrak{R}S$ при любом $S \in \mathfrak{S}_n$*

Доказательство. Очевидно, $\mathfrak{R}S \subset \mathfrak{R}_S$. С другой стороны, $\overline{N} \in \mathfrak{R}_S \to \varphi(\overline{N})=\varphi(S)=S$. Поэтому $\varphi(\overline{N}S^{-1})=\varphi(\overline{N})\varphi(S^{-1})=SS^{-1}=E \to \overline{N}S^{-1} \in \mathfrak{R} \to \overline{N} \in \mathfrak{R}S$.

Следствие. При $S_1 \neq S_2$ $\mathfrak{R}S_1 \cap \mathfrak{R}S_2=0$.

Лемма 7. *Если дефект подстановки P более единицы, то найдутся хотя бы две различные подстановки S_1 и S_2 нулевого дефекта такие, что $PS_1=PS_2$.*

Доказательство. Пусть (с точностью до обозначений)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \delta_1 & \delta_1+1 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-k} \end{pmatrix} \qquad (k \geqslant 2).$$

Возьмем

$$S_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-k} & \gamma_1 & \ldots & \gamma_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_{n-k} & \theta_1 & \ldots & \theta_k \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-k} & \gamma_1 & \ldots & \gamma_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_{n-k} & \theta_k & \ldots & \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $PS_1 = PS_2$.

Следствие 1. $\mathfrak{N}$ содержит подстановки только нулевого и единичного дефектов. Если бы дефект $N \in \mathfrak{N}$ был больше единицы, то нашлись бы S_1 и S_2 такие, что $NS_1 = NS_2$, но $NS_1 \in \mathfrak{N}S_1$ и $NS_2 \in \mathfrak{N}S_2$, а $\mathfrak{N}S_1 \cap \mathfrak{N}S_2 = 0$.

Следствие 2. По лемме 2, все $\mathfrak{N}_S$-классы содержат подстановки дефекта не выше единицы.

Лемма 8. *Множество элементов, входящих в $\mathfrak{N}_S$-классы, есть ассоциативная система (подсистема C_n).*

Доказательство следует из того, что обусловленное множество является полным гомоморфным φ-прообразом группы.

Следствие. Если какой-нибудь из $\mathfrak{N}_S$-классов содержит подстановку ненулевого дефекта, то, по лемме 4, множество элементов $\mathfrak{N}_S$-классов содержит подстановки дефекта $n-1$, чего, по следствию 2 леммы 7, быть не может. Поэтому $\mathfrak{N}_S$-классы и, в частности, $\mathfrak{N}$ содержат лишь подстановки нулевого дефекта. Следовательно, $\mathfrak{N} = E$. Теорема доказана.

При доказательстве мы предполагали $n \geqslant 5$. Нетрудно проверить непосредственно, что при $n=2, 3, 4$ теорема остается в силе с тем дополнением, что при $n=4$ нормальный делитель $\mathfrak{S}_4$ четвертого порядка оказывается нормальной подсистемой C_4.

Обобщая доказанное, можно сформулировать (в определениях H. Rauter'a (²)) следующую теорему.

Если при представлении сверхгруппы ассоциативной системой подстановок ее область регулярности представится группой, все нормальные делители которой дважды транзитивны, то нормальными подсистемами сверх группы будут эти нормальные делители и только они.

Это обобщение доказывается аналогично изложенному частному случаю.

Поступило
6 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. С. Ляпин, Математ. сб., **20**, 3 (1947). [2] H. Rauter, J. Crelle, **159** (1928).