Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

АСТРОНОМИЯ

В. СОРОКИН

О ХАРАКТЕРЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ШАРОВ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 21 VI 1947)

Трудность исследования устойчивости тяготеющих масс связана с тем, что исходное состояние не есть состояние термодинамического равновесия. Обычно в невозмущенном состоянии имеется стационарный поток энергии и равновесие только механическое. Термодинамические критерии устойчивости непосредственно к таким задачам неприменимы и приходится искать решения уравнений движения, что связано с большими математическими трудностями. Если и удается решить задачу для возмущения специального вида, то остается открытым вопрос об устойчивости относительно произвольных возмущений, и тем более вопрос о характере неустойчивости, когда она имеет место.

Попытки построения теории красных гигантов привели в последнее время к рассмотрению изотермических газовых масс, заключенных в шаровую оболочку. Эта задача замечательна тем, что невозмущенный газ находится в термодинамическом равновесии, и термодинамическая его устойчивость, т. е. устойчивость относительно произвольных возмущений, может быть очень легко исследована. Это исследование было проведено нами раньше [1], причем оказалось, что некоторые равновесные состояния термодинамически неустойчивы. Возникает вопрос о характере этой неустойчивости. Действительно, термодинамическая неустойчивость означает, что существуют возмущения специального вида, приводящие к нарушению устойчивости. Однако в газовых массах, имеющих размеры звезд, отнюдь не всякие возмущения действительно осуществимы. Вязкость и теплопроводность не могут там иметь никакого значения даже для очень больших промежутков времени, и энтропия смещающихся при возмущении масс остается практически постоянной. Поэтому все действительные возмущения следует считать адиабатическими, и может оказаться, что термодинамически неустойчивый газ будет устойчив относительно адиабатических возмущений. Если бы этот случай имел место, то возмущения вызывали бы в газе обычные малые колебания, которые должны были бы, однако, очень медленно нарастать, так как термодинамически неустойчивая система должна рано или поздно перейти в более устойчивое состояние. Неустойчивость была бы, таким образом, вековой. Мы покажем здесь, что при известных условиях именно этот случай имеет место для изотермических газовых шаров. Можно думать, что вековая неустойчивость будет очень часто встречаться и в других случаях равновесия тяготеющих масс.

Самое понятие вековой неустойчивости было введено Томсоном и Тэтом в теории гироскопических систем, устойчивое равновесие которых может стать неустойчивым под действием диссипативных сил. Оно было перенесено затем в теорию вращающихся тяготеющих масс ([2]), причем, повидимому, установилось мнение, что возможность такого рода неустойчивости связана с наличием гироскопических сил, так что понятие это имеет отношение только к вращающимся системам или системам в состоянии стационарного движения. Наш пример показывает, что вековой характер неустойчивости может быть обусловлен причинами, не имеющими ничего общего с гироскопическими членами в уравнениях движения. Существенна малость диссипативных сил, при отсутствии которых система была бы вообще устойчивой.

Для простоты изложения мы здесь рассмотрим невырожденный газ. Случай газа частично вырожденного более интересен, но и более сложен и не может быть рассмотрен здесь. Мы считаем также оболочку жесткой. Единицы измерения выбраны так, что гравитационная постоянная равна $1/4\pi$, а уравнение состояния газа в равновесии имеет вид $p_0 = \rho_0$.

Рассмотрим адиабатические возмущения в некоторой массе идеального газа, находящейся в состоянии неустойчивого термодинамического равновесия внутри шаровой оболочки, температура которой постоянна. Известно ([1]), что нарушение устойчивости возможно только при радиальных возмущениях, поэтому только такие возмущения мы и должны здесь рассматривать. Условием устойчивости относительно адиабатических возмущений будет, очевидно, минимум энергии системы. Выберем в качестве назависимых переменных плотность и энтропию единицы массы газа в данном месте и обозначим отклонения этих величин от их равновесных значений ρ_0 и s_0 через ρ и s. Соответствующие величины для потенциала тяготения пусть будут φ_0 и φ. Тогда изменение полной энергии можно получить, разлагая энергию единицы массы по степеням ρ и s.

Пользуясь термодинамическими соотношениями и уравнением состояния, получим, сохраняя величины второго порядка:

$$\Delta E = \int [\rho (w_0 + \varphi_0) + s\rho_0]\, dV +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \left[\gamma\, \frac{\rho^2}{\rho_0} + 2\gamma\rho s + (\gamma - 1)\, \rho_0 s^2 + \rho\varphi\right] dV \tag{1}$$

(здесь w_0 — тепловая функция единицы массы, $\gamma = c_p/c_v$).

Величины ρ, s и φ не независимы. Изменение потенциала связано с изменением плотности уравнением Пуассона, а ρ и s должны быть выражены через смещение частиц газа ξ. Чтобы сделать это, нужно написать условия сохранения массы и энтропии смещающихся частиц и разрешить получающиеся уравнения относительно ρ и s с точностью до членов второго порядка по ξ.

Это дает (в тензорных обозначениях):

$$\rho = -\nabla (\rho_0 \vec{\xi}) + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (\rho_0 \xi_i \xi_k), \tag{2}$$

$$s = -\vec{\xi}\, \nabla s_0 + \xi_i\, \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\, \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\, \xi_i \xi_k\, \frac{\partial^2 s_0}{\partial x_i \partial x_k}. \tag{3}$$

Подставляя это в (1), мы убедимся, что линейные относительно ξ члены обращаются в нуль в силу уравнений равновесия и исчезновения ξ на поверхность шара. Квадратичные члены будут:

$$\delta^2 E = \frac{1}{2} \int \left[\gamma\, \frac{\rho^2}{\rho_0} + 2(\gamma - 1)\, \rho s + (\gamma - 1)\, \rho_0 s^2 + \rho\varphi\right] dV. \tag{4}$$

Здесь, конечно, следует брать для ρ и s только линейные относительно ξ части выражений (2) и (3).

Мы должны выяснить, может ли это выражение быть отрицательным. Если бы это было возможно, то, как известно, существовал бы шар меньших размеров, для которого минимальное значение $\delta^2 E$ было бы нулем. Соответствующее смещение ξ удовлетворяло бы уравнению, которое получится, если варьировать ξ в выражении (4) и вариацию приравнять нулю. Вариации ρ и s можно получить из уравнений (2) и (3) (достаточно взять линейные члены), а вариацию φ — из уравнения Пуассона. Таким образом, получается:

$$\nabla\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)+\frac{\gamma-1}{\gamma}\left[\frac{\rho\nabla\rho_0}{\rho_0^2}+\frac{\nabla(\vec{\xi}\nabla\rho_0)}{\rho_0}\right]+\nabla\varphi+0. \tag{5}$$

Мы использовали здесь еще вытекающее из термодинамических соотношений и постоянства температуры в равновесии равенство

$$\nabla s_0=-\frac{\nabla\rho_0}{\rho_0}.$$

Возмущение потенциала легко исключить. Действительно, выражая в уравнении Пуассона ρ через ξ, получим

$$\operatorname{div}(\nabla\varphi+\rho_0\vec{\xi})=0.$$

Но в нашей задаче выражение в скобках исчезает на поверхности шара, а его вихрь всюду равен нулю, так как смещение радиально. Следовательно,

$$\nabla\varphi=-\rho_0\vec{\xi}. \tag{6}$$

Вводя обозначение $\ln\rho_0=\mu$, мы с помощью (2) и (6) приводим уравнение (5) к виду

$$\xi''+\left(\frac{2}{r}+\mu'\right)\xi'+\frac{1}{\gamma}\left[\mu''+\frac{2(\gamma-1)\mu'}{r}-\frac{2\gamma}{r^2}+e^{\mu}\right]\xi=0, \tag{7}$$

причем μ удовлетворяет уравнению равновесия

$$\mu'+\frac{2\mu'}{r}=-e^{\mu}. \tag{8}$$

Наконец, введем новую неизвестную функцию

$$y=r\xi e^{\mu/2}. \tag{9}$$

Тогда получаем для y уравнение

$$y''+\left[\frac{e^{\mu}}{1}-\frac{\mu'^2}{4}-\frac{2}{r^2}+\frac{2(\gamma-1)\mu'}{\gamma r}\right]y=0 \tag{10}$$

с граничными условиями $y=0$ при $r=0$ и $r=R>0$.

Если $\gamma=4/3$, то функция

$$y=r^2 e^{\mu/2} \tag{11}$$

удовлетворяет уравнению (10) и граничному условию при $r=0$, но, очевидно, не может удовлетворять второму граничному условию. Второе же решение уравнения бесконечно при $r=0$. Итак, в этом случае уравнение наше не имеет решений и газ не может быть неустойчивым. С возрастанием γ выражение в квадратных скобках в уравнении

(10) уменьшается, откуда следует, что и при $\gamma > 4/3$ уравнение не может иметь решений, удовлетворяющих граничным условиям.

Таким образом, газ будет устойчив относительно адиабатических возмущений при $\gamma \geqslant 4/3$, и если он неустойчив термодинамически, то неустойчивость его оказывается вековой.

Ивановский педагогический институт
г. Иваново

Поступило
21 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Сорокин, ДАН, 58, № 1 (1947). [2] J. Jeans, Astronomy and Cosmogony, Cambridge, 1929.