Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. И. РОЗОВСКИЙ

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ НАЛИЧИИ УПРУГОГО ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 V 1947)

Рассмотрим деформацию длинного однородного изотропного цилиндрического тела, складывающуюся из деформации от напряжения при наличии последействия и непосредственно от повышения температуры, распределяющейся в нем неравномерно.

Границы изменения температуры предполагаются такими, при которых относительное температурное расширение пропорционально температуре и упругие постоянные и коэффициенты упругого последействия не зависят от температуры. Предполагается, что смещения u, v, w меняются во времени настолько медленно, что можно пренебречь величинами $\partial^2 u/\partial t^2$, $\partial^2 v/\partial t^2$, $\partial^2 w/\partial t^2$.

Имея в виду рассмотрение плоской задачи, предположим, что распределение температуры в цилиндрическом теле не зависит от z (ось z направлена параллельно образующей цилиндра) и выполняются условия: $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0$, $\partial w/\partial z = a$, где a — постоянная, u и v являются функциями только x, y и времени t.

В таком случае можно следующим образом обобщить закон Гука — Вольтерра [1]:

$$\tau_{ii} = \lambda\theta(t) + 2\mu e_{ii}(t) - \int_{t_0}^{t} [\varphi(t,\tau)\theta(\tau) + 2\psi(t,\tau)e_{ii}(\tau)]\,d\tau - \alpha\beta T(t), \tag{1}$$

$$\tau_{ij} = \mu e_{ij} - \int_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)\,e_{ij}(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе, $\varphi(t,\tau)$ и $\psi(t,\tau)$ — коэффициенты упругого последействия, $\beta = 2\mu + 3\lambda$ и $\theta = e_{11} + e_{22} + a$.

Здесь компоненты напряжения τ_{ii}, τ_{ij} и деформации e_{ii}, e_{ij} и температура T зависят от координат x, y и времени t.

Подставляя (1) и (2) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial\tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{22}}{\partial y} = 0,$$

получим:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u - \int_{t_0}^{t}\left\{\psi(t,\tau)\Delta u(\tau) + [\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau)]\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\}d\tau - \alpha\beta\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v-\int_{t_0}^{t}\left\{\psi(t,\tau)\,\Delta v(\tau)+[\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau)]\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\right\}d\tau-$$

$$-\alpha\beta\frac{\partial T}{\partial y}=0. \tag{4}$$

Дифференцируя (3) по x, (4) по y и затем складывая, получим:

$$\Delta\theta=\frac{\alpha\beta}{\lambda+2\mu}\,\Delta T+\int_{t_0}^{t}[\varphi(t,\tau)+2\psi(t,\tau)]\,\Delta\theta(\tau)\,d\tau,$$

откуда

$$\Delta\theta=\frac{\alpha\beta}{\lambda+2\mu}\left\{\Delta T+\int_{t_0}^{t}L(t,\tau)\,\Delta T(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{5}$$

где $L(t,\tau)$ — резольвента ядра $\varphi(t,\tau)+2\psi(t,\tau)$.

Из (1) следует:

$$\theta=\frac{W}{\beta}+3\alpha T+\int_{t_0}^{t}Q(t,\tau)\left[\frac{W(\tau)}{\beta}+3\alpha T(\tau)\right]d\tau, \tag{6}$$

где $Q(t,\tau)$ — резольвента ядра $[3\varphi(t,\tau)+2\psi(t,\tau)]/\beta$,

$$W=\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}. \tag{7}$$

Определяя $e_{33}(=a)$ из (1), получим:

$$a=\frac{\lambda+\mu}{\mu\beta}\left\{\tau_{33}(b)-\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}[\tau_{11}(t)+\tau_{22}(t)]\right\}+\alpha T(t)+$$

$$+\frac{1}{3\mu\beta}\int_{t_0}^{t}\Big\{[\mu E(t,\tau)+\beta Q(t,\tau)]\,\tau_{33}(\tau)-$$

$$-\left[\frac{\beta}{2}E(t,\tau)-\mu Q(t,\tau)\right][\tau_{11}(\tau)+\tau_{22}(\tau)]+3\alpha T(\tau)\Big\}\,d\tau, \tag{8}$$

где $E(t,\tau)$ — резольвента ядра $\psi(t,\tau)/\mu$.

Находя из (8) τ_{33}, подставляя в (7) и затем производя над обеими частями полученного выражения для W операцию Лапласа, будем иметь:

$$\Delta W=-\frac{\beta}{2(\lambda+\mu)}\,\Delta(\tau_{11}+\tau_{22})-\frac{\alpha\beta\mu}{\lambda+\mu}\,\Delta T+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\{D_1(t,s)\,\Delta[\tau_{11}(s)+\tau_{22}(s)]+D_2(t,s)\,\Delta T(s)\}\,ds, \tag{9}$$

$$D_1(t,s)=\frac{1}{\lambda+\mu}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{\beta}{2}E(t,s)-\mu Q(t,s)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{2}A(t,s)-\frac{1}{3}\int_{s}^{t}A(t,\tau)\left[\frac{\beta}{2}E(t,\tau)-\mu Q(t,\tau)\right]d\tau\right\},$$

$$D_2(t, s)=\frac{\alpha}{\lambda+\mu}\left[\mu\beta A(t, \tau)-1+\int_{t_0}^{t} A(t, \tau)\right] d\tau,$$

где $A(t, s)$ — резольвента ядра $[\mu E(t, s)+\beta Q(t, s)]/3(\lambda+\mu)$.

Из (5), (6) и (9) получим:

$$\Delta(\tau_{11}+\tau_{22})+\frac{2\mu\alpha\beta}{\lambda+2\mu}\Delta T+$$

$$+\int_{t_0}^{t} K_1(t, s)\Delta[\tau_{11}(s)+\tau_{22}(s)]\, ds+\int_{t_0}^{t} K_2(t, s)\Delta T(s)\, ds=0, \qquad (10)$$

$$K_1(t, s)=2(\lambda+\mu)\left[\frac{Q(t, s)}{2(\lambda+\mu)}+\frac{D_1(t, s)}{\beta}+\frac{1}{\beta}\int_{s}^{t} Q(t, \tau) D_1(\tau, s)\, d\tau\right],$$

$$K_2(t, s)=2(\lambda+\mu)\left[\frac{1}{\beta} D_2(t, s)-\frac{\alpha\beta}{\lambda+2\mu} L(t, s)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha\beta}{\lambda+\mu} Q(t, s)+\frac{1}{\beta}\int_{s}^{t} Q(t, \tau) D_2(\tau, s)\, ds\right].$$

Когда последействие отсутствует, то $K_1(t, s)$ и $K_2(t, s)$ исчезают и интегро-дифференциальное уравнение (10) приводится к известному дифференциальному уравнению, связывающему $\tau_{11}+\tau_{22}$ с T в случае идеально упругого тела.

Пусть

$$\tau_{11}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(U_1-U_2), \quad \tau_{22}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(U_1-U_2), \quad \tau_{12}=-\frac{\partial^2(U_1-U_2)}{\partial x\, \partial y}. \qquad (11)$$

Подставляя выражения (11) в (10), получим:

$$\Delta\Delta U_1+\int_{t_0}^{t} K_1(t, s)\Delta\Delta U_1(s)\, ds-\Delta\left[\Delta U_2+\int_{t_0}^{t} K_1(t, s)\Delta U_2(s)\, ds-T_1\right]=0, \quad (12)$$

$$T_1=\frac{2\alpha\beta\mu}{\lambda+2\mu} T+\int_{t_0}^{t} K_2(t, s) T(s)\, ds. \qquad (13)$$

Если

$$\Delta U_2+\int_{t_0}^{t} K_1(t, s)\Delta U_2(s)\, ds=T_1, \qquad (14)$$

то функция U_1 определяется из следующего уравнения:

$$\Delta\Delta U_1+\int_{t_0}^{t} K_1(t, s)\Delta\Delta U_1(s)\, ds=0. \qquad (15)$$

Когда температура T задана, то T_1 легко определяется из формулы (13).

Решая уравнение (14) относительно ΔU_2, получим:

$$\Delta U_2 = T_1(t) - \int_{t_0}^{t} Q_1(t, s) T_1(s) ds = T^*(t), \tag{16}$$

где $Q_1(t, s)$ — резольвента ядра $K_1(t, s)$; функция $T^*(t)$ определяется из формулы:

$$T^*(t) = \frac{2\mu\alpha\beta}{\lambda + 2\mu} T(t) + \int_{t_0}^{t} R(t, s) T(s) ds, \tag{17}$$

$$R(t, s) = K_2(t, s) - \frac{2\alpha\beta\mu}{\lambda + 2\mu} Q_1(t, s) - \int_{s}^{t} Q_1(t, \tau) K_2(\tau, s) d\tau.$$

Из уравнения (15) получим

$$\Delta\Delta U_1 = 0. \tag{18}$$

Отсюда следует, что U_1 будет одна и та же как при наличии последействия, так и при его отсутствии.

Функция U_2 в случае отсутствия последействия, как известно ([2]), определяется из уравнения Пуассона

$$\Delta U_2 = \frac{2\mu\alpha\beta}{\lambda + 2\mu} T = t_1. \tag{19}$$

Поэтому для того, чтобы перейти от плоской задачи при отсутствии упругого последействия к такой же задаче при наличии последействия, достаточно в уравнении (19) заменить t_1 на T^*.

В рассмотренной задаче мы не учитывали влияний последействия при тепловом расширении; для учета последнего достаточно в (13) вместо T подставить

$$T_\nu(t) = T(t) + \int_{t_0}^{t} \nu(t, \tau) T(\tau) d\tau,$$

$$\nu(t, \tau) = \frac{\mathfrak{R}(t, \tau)}{\alpha} - \frac{3\varphi(t, \tau) + 2\psi(t, \tau)}{\beta} - \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\tau}^{t} [3\varphi(t, s) + 2\psi(t, s)] \mathfrak{R}(s, \tau) ds,$$

где $\mathfrak{R}(t, \tau)$ — коэффициент последействия при линейном тепловом расширении.

Указанный способ образования решения плоской задачи с упругими последействиями применим также при определении напряжений при наличии последействия в симметрично нагретых сферической оболочке и шаре при неравномерно распределенной температуре.

Поступило
29 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Volterra, Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations, London, 1931. [2] Н. Н. Лебедев, Температурные напряжения в теории упругости, 1937.