Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

ГЕОФИЗИКА

В. А. КРАСИЛЬНИКОВ

О ФЛУКТУАЦИЯХ АМПЛИТУДЫ ЗВУКА ПРИ ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 VI 1947)

Известно, что при распространении звука в турбулентной атмосфере происходят колебания уровня сигнала — акустические замирания или фэдинги, тем большие, чем больше скорость ветра, выше частота звука и чем больше расстояние между излучателем и приемником (1).

В настоящей заметке мы ставим своей задачей рассмотреть это явление с точки зрения статистической теории турбулентности.

Будем исходить из следующих предположений:

1. Размеры неоднородностей поля скоростей основного потока много больше длины звуковой волны; другими словами, будем считать, что мы имеем дело с геометрической акустикой.

2. Поле скоростей основного потока несжимаемо.

3. Влиянием температурных неоднородностей на изменение скорости звука можно пренебречь.

Волновое уравнение акустики движущейся среды при условиях 2 и 3 будет иметь вид:

$$D_t^2\varphi = c^2\nabla^2\varphi, \tag{1}$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)$ — оператор полной производной, c — скорость звука и $\vec{v} \ll c$ — скорость потока. Уравнение (1) можно также записать в форме:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \nabla^2\varphi - \frac{2}{c}\vec{v}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\nabla(\vec{v}\nabla\varphi). \tag{2}$$

Будем искать решение уравнения (2) в виде:

$$\varphi = \varphi_0(x, y, z)\, e^{i\omega[t - S(x, y, z)/c]}, \tag{3}$$

где ω — частота звука и $S(x, y, z)$ — фазовая функция (эйконал). Подставляя (3) в (2), разделяя действительную и мнимую части и делая переход к геометрической акустике, полагая длину волны $\lambda = 0$, а также отбрасывая члены второго порядка малости относительно $\vec{v}/c$, получим два уравнения:

$$(\nabla S)^2 = \frac{(c^2 - \vec{v}\nabla S)^2}{c^2}, \tag{4}$$

$$2\nabla\ln\varphi_0\left(\nabla S + \frac{\vec{v}}{c}\right) = -\nabla^2 S. \tag{5}$$

Уравнение (4) представляет уравнение эйконала для движущейся среды, а уравнение (5) дает связь между фазовой и амплитудной функциями.

При распространении звука в турбулентном потоке, благодаря имеющимся в нем случайным пульсациям скорости, будут происходить флуктуации фазы звуковой волны ([2]), и поскольку фазовая и амплитудная функции связаны между собой уравнением (5), будут иметь место также случайные изменения амплитуды звука. Представим $\vec{v}$, S и φ_0 в виде:

$$\vec{v}=\overline{\vec{v}}+\vec{v}', \qquad S=\overline{S}+S', \qquad \ln\varphi_0=\ln\overline{\varphi}_0+\Psi, \tag{6}$$

где $\vec{v}'$ — пульсационная скорость, S' — случайное изменение фазы и Ψ — изменение логарифма амплитуды.

Подставляя значения для $\vec{v}, S$ и $\ln\varphi_0$ из (6) в уравнения (4) и (5) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим для градиентов S' и Ψ уравнения:

$$\nabla\overline{S}\nabla S'=-\frac{\vec{v}'}{c}\nabla\overline{S}, \tag{7}$$

$$\nabla\Psi\nabla\overline{S}=-\frac{1}{2}\nabla^2S'-\nabla\ln\overline{\varphi}_0\left(\nabla S'+\frac{\vec{v}'}{c}\right). \tag{8}$$

Поскольку $\nabla\overline{S}\sim 1$, для направления соответствующего направлению луча (ось x) будем иметь:

$$\frac{\partial S'}{\partial x}=-\frac{v'_x}{c}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-\frac{1}{2}\nabla^2S', \tag{10}$$

откуда

$$\Psi=-\frac{1}{2}\int_0^L\nabla^2S'\,dx, \tag{11}$$

где L — расстояние между излучателем и приемником (оба предполагаются направленными). На основании уравнения (9)

$$\nabla^2S'=-\frac{1}{c}\frac{\partial v'_x}{\partial x}-\frac{1}{c}\int_0^L\left(\frac{\partial^2v'_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v'_x}{\partial z^2}\right)dx. \tag{12}$$

Подставляя это выражение для лапласиана в (11) и заменяя двукратное интегрирование однократным, найдем:

$$\Psi=\frac{1}{2c}\left(v'_x\big|_0-v'_x\big|_L\right)-\frac{1}{2c}\int_0^L(L-x')\left[\frac{\partial^2v'_x(x')}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v'_x(x')}{\partial z^2}\right]dx'. \tag{13}$$

Нам нужно определить $\overline{\Psi^2}$, которое по (13) будет равно

$$\overline{\Psi^2}=\frac{1}{4c^2}\int_0^L\int_0^L(L-x)(L-x')\times$$

$$\times\overline{\left[\frac{\partial^2v'_x(x)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v'_x(x)}{\partial z^2}\right]\left[\frac{\partial^2v'_x(x')}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2v'_x(x')}{\partial z'^2}\right]}\,dx\,dx' \tag{14}$$

(первым членом в (13) ввиду его малости мы пренебрегаем).

Считая турбулентность изотропной, получим вместо (14):

$$\overline{\Psi^2}=\frac{1}{2c^2}\int\limits_0^L\int\limits_0^L(L-x)(L-x')\left[\overline{\frac{\partial^2 v'_x(x)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v'_x(x')}{\partial y'^2}}+\right.$$

$$\left.+\overline{\frac{\partial^2 v'_x(x)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v'_x(x')}{\partial z'^2}}\right]dx\,dx'. \qquad (15)$$

Корреляцию вторых производных пульсационных скоростей можно вычислить, если воспользоваться формулой Кармана ([3]) для тензора корреляции:

$$\overline{v^i(\vec{r}_0)\,v^k(\vec{r}_0+\vec{\rho})}=M^{ik}(\vec{\rho})=(f-g)\frac{\xi^i\xi^k}{\rho^2}+g\delta^{ik}, \qquad (16)$$

где $\rho^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$, $\xi^i=x'^i-x^i$, f — продольная и g — поперечная корреляционные функции, между которыми имеется соотношение

$$f-g=-\frac{1}{2}\rho f'. \qquad (17)$$

После довольно громоздких, но не сложных вычислений, для нашего случая, когда мы интересуемся только одним направлением вдоль луча и $\rho=x'-x$, для корреляции вторых производных получаются следующие выражения:

$$\overline{\frac{\partial^2 v'_x(x)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v'_x(x')}{\partial y'^2}}=9\left[\frac{f''}{(x'-x)^2}-\frac{f'}{(x'-x)^3}\right], \qquad (18)$$

$$\overline{\frac{\partial^2 v'_x(x)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v'_x(x')}{\partial z'^2}}=3\left[\frac{f''}{(x'-x)^2}-\frac{f'}{(x'-x)^3}\right]. \qquad (19)$$

Разобьем скорость турбулентного потока на две компоненты — микрокомпоненту и макрокомпоненту ([4,5]). Те пульсации скорости потока, масштаб l которых меньше длины звуковой волны λ, приводят к рассеянию звука ([6]); для рассматриваемого нами случая $\lambda\ll l$ неоднородности поля скоростей приводят к изменению кривизн фронта волны и к колебаниям интенсивности звука в точке нахождения приемника. Отбрасывание микрокомпоненты равносильно сглаживанию кривой корреляции f на промежутке $\Lambda=k\lambda$ порядка длины звуковой волны (k — некоторый параметр сглаживания, который, за неимением строгой теории, можно определить из эксперимента).

Будем считать, что на расстояниях бóльших Λ для корреляцинной функции f имеет место закон двух третей ([4,7]) и

$$f_1=C^2(x'-x)^{2/3}, \qquad (20)$$

где C — характеристика турбулентности, имеющая размерность см$^{2/3}$·сек.$^{-1}$; на расстояниях равных и меньших Λ сгладим f по полиному:

$$f_2=a\Lambda^2+b\Lambda^4+c\Lambda^6. \qquad (21)$$

Требуя непрерывности первой и второй производных (20) и (21) в точке $x'-x=\Lambda$ и сопрягая эти функции, найдем, что f имеет вид:

$$f=C^2(x'-x)^{2/3} \quad \text{при} \quad \infty<x'-x\leqslant\Lambda$$

$$f=\frac{C^2\Lambda^{2/3}}{9}\left[30\left(\frac{x'-x}{\Lambda}\right)^2-16\left(\frac{x'-x}{\Lambda}\right)^4+5\left(\frac{x'-x}{\Lambda}\right)^6\right] \qquad (22)$$

$$\text{при} \quad \Lambda\leqslant x'-x\leqslant 0.$$

Для корреляции вторых производных (18), (19), согласно (22), будем иметь:

$$\overline{\frac{\partial^2 v'_x(x)}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 v'_x(x')}{\partial y'^2}} = \begin{cases} C^2\Lambda^{2/3}\left[120\,\dfrac{(x'-x)^2}{\Lambda^6}-\dfrac{128}{\Lambda^4}\right] & \text{при } \Lambda \leqslant x'-x < 0, \\ -8C^2(x'-x)^{-10/3} & \text{при } \infty < x'-x \leqslant \Lambda. \end{cases} \tag{23}$$

$$\overline{\frac{\partial^2 v'_x(x)}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 v'_x(x')}{\partial z'^2}} = \begin{cases} C^2\,\dfrac{\Lambda^{2/3}}{3}\left[120\,\dfrac{(x'-x)^2}{\Lambda^6}-\dfrac{128}{\Lambda^4}\right] & \text{при } \Lambda \leqslant x'-x < 0 \\ -\dfrac{8}{3}C^2(x'-x)^{-10/3} & \text{при } \infty < x'-x \leqslant \Lambda. \end{cases} \tag{24}$$

Подставляя (23) и (24) в (15) и произведя интегрирование, найдем выражение для $\sqrt{\overline{\Psi^2}}$:

$$\sqrt{\overline{\Psi^2}} = 2{,}3\,\frac{CL^{3/2}}{ck^{7/6}\lambda^{7/6}}. \tag{25}$$

Исходя из наших экспериментов ([8]), оказалось возможным установить, что зависимость $\sqrt{\overline{\Psi^2}}$ от длины волны, даваемая формулой (25), при данном расстоянии L удовлетворительно согласуется с данными опыта на частотах 2000—5000 Hz, если положить параметр k равным 10 (т. е. того же порядка, что и в работе Д. И. Блохинцева ([5])). Пропорциональность $\sqrt{\overline{\Psi^2}}$ характеристике турбулентности C также представляется весьма естественной, поскольку C растет с увеличением скорости ветра. За неимением экспериментальных данных проверить зависимость $\sqrt{\overline{\Psi^2}}$ от L не представилось возможным. Укажем, что P. G. Bergmann в недавней работе ([9]) получил такую же зависимость от L для колебания уровня звукового сигнала в среде со случайным распределением коэффициента преломления.

В ближайшее время мы предполагаем провести эксперименты по более основательной проверке формулы (25), о которых сообщим особо.

Институт теоретической геофизики
Академии Наук СССР

Поступило
26 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Sieg, Electr. Nachr. Techn., 17, 193 (1940). [2] В. А. Красильников, ДАН, 47, 486 (1945). [3] T. Karman and L. Howarth, Proc. Roy. Soc., London, A, 164, 192 (1938). [4] А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4—5, 454 (1941). [5] Д. И. Блохинцев, ДАН, 46, 150 (1945). [6] А. М. Обухов, ДАН, 30, 611 (1941). [7] А. Н. Колмогоров, ДАН, 32, № 7 (1941). [8] В. А. Красильников, ДАН, 46, 103 (1945). [9] P. G. Bergmann, Phys. Rev., 70, № 7—8 (1946).