Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

ГЕОФИЗИКА

С. В. ДОБРОКЛОНСКИЙ

ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ МОРЯ И ВОЛНЕНИЕ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 27 VI 1947)

Джеффрис ([1]), повидимому, первый высказал мысль о том, что турбулентная вязкость в верхних слоях моря определяется волнением, имеющим место на поверхности воды. Его попытка вычислить коэффициент турбулентной вязкости по элементам волнения не дала удовлетворительных результатов, однако, высказанная идея представляется весьма плодотворной.

Будем считать, что координаты x и z частицы, движущейся в волне, удовлетворяют основным уравнениям трохоидальной теории волн:

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + r_0 e^{-2\pi z_1/\lambda} \sin\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - ct),\\
z &= z_1 + r_0 e^{-2\pi z_1/\lambda} \cos\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - ct).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Так как волновое движение затухает с глубиной, должно иметь место скольжение одних слоев воды относительно других и вместе с тем и вихреобразование, приводящее к процессам турбулентного обмена.

Поле турбулентных пульсаций может быть рассчитано по Карману ([2]), применяя к волновому движению метод Бетца ([3]). Сообщим всей массе жидкости скорость $-c$, что не должно изменить структуру поля пульсаций. Движение делается установившимся и имеет компоненты скоростей:

$$
\begin{aligned}
U &= -c + u(x_1, z_1) = -c - \frac{2\pi r_0}{T} e^{-2\pi z_1/\lambda} \cos\frac{2\pi}{\lambda} x_1,\\
W &= w(x_1, z_1) = +\frac{2\pi r_0}{T} e^{-2\pi z_1/\lambda} \sin\frac{2\pi}{\lambda} x_1.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Предположим, что, пользуясь (1), где $x_1 - ct$ в тригонометрических функциях заменено на x_1, нам удалось исключить x_1 и z_1 из (2) и найти выражения компонентов скоростей в любой точке установившейся волны в функции ее эйлеровых координат x и z:

$$
\begin{aligned}
U &= -c + u(x, z),\\
W &= w\ (x, z).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Пульсации горизонтальной компоненты U_0 средней скорости в произвольной точке зависят, с одной стороны, от того, что в эту точку из слоев, находящихся от выбранного на некотором расстоянии l_1 по вертикали, переносятся поперечным движением частицы жидкости, имеющие горизонтальные компоненты средней скорости, равные $U_0 \pm l_1 \frac{\partial U_0}{\partial z}$.

Это дает для максимального значения пульсаций, усредняя его по x (или x_1) на длине периодичности движения λ:

$$\overline{u'} = \pm l_1 \left(\overline{\frac{\partial U_0}{\partial z}}\right)_{x_1} = \pm l_1 \left(\overline{\frac{\partial u_0}{\partial}}\right)_{x_1}. \qquad (4)$$

С другой стороны, поперечное движение частиц переносит также и вихрь скорости $\Omega = \frac{\partial U_0}{\partial z} - \frac{\partial W_0}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x}$, величина которого у переносимых масс будет отличаться от величины его в рассматриваемом слое на

$$\Omega - \Omega_0 = \pm l_1 \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial z}\right) = \pm l_1 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\, \partial z}\right).$$

Если рассматривать „блуждающие массы“ в жидкости как вихри со средним диаметром l_2, то пульсации скорости, создаваемые ими, будут в среднем пропорциональны

$$v' \approx l_2 (\Omega - \Omega_0) \approx l_1 l_2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\, \partial z}\right).$$

Делая предположение о подобии явлений в поле турбулентных пульсаций, следует положить, что в любой точке поля должна соблюдаться пропорциональность как пульсационных скоростей, так и длин, характеризующих пути переноса и размеры вихрей, т. е.

$$\overline{u'} \approx v' \quad \text{и} \quad l_1 \approx l_2.$$

Введем вместо l_1 и l_2 единый масштаб длин l и найдем среднее значение v' по x (или x_1) на длине λ.

Тогда

$$\overline{v'} \approx l^2 \left(\overline{\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\, \partial z}}\right)_x \approx l^2 \left(\overline{\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}}\right)_x \approx {}^2 \left(\overline{\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}}\right)_{x_1}, \qquad (6)$$

так как

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\, \partial z}}\right)_x = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\, \partial z} dx = 0.$$

Из (5), (4) и (6) следует

$$l \left(\overline{\frac{\partial u_0}{\partial x}}\right)_{x_1} = l^2 \left(\overline{\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}}\right)_x$$

или

$$l = k \frac{\left(\overline{\frac{\partial u_0}{\partial z}}\right)_{x_1}}{\left(\overline{\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}}\right)_{x_1}}. \qquad (7)$$

Постоянную k здесь будем считать обычной „универсальной" постоянной, равной по опытам в трубах 0,36—0,40.

Пользуясь обычным выражением теории Прандтля, которое осредняется по x (или x_1), $A_v = \rho l^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)_{x_1}$, мы получим для коэффициента турбулентной вязкости (коэффициента обмена) в волне модифицированную формулу Кармана:

$$A_v = \rho k^2 \left| \frac{\overline{\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)^3_{x_1}}}{\overline{\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\right)^2_{x_1}}} \right|. \tag{8}$$

Величины производных $\frac{\partial u_0}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}$ находятся из (2) и (1), считая параметры Лагранжа x_1 и z_1, функциями независимых переменных x и z. Обозначая для краткости $e^{-2\pi z_1/\lambda} = \beta$ и $2\pi x_1/\lambda = \varphi$, имеем:

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{\frac{4\pi^2 r_0}{\lambda T}\beta\left(\cos\varphi + \frac{2\pi r_0}{\lambda}\beta\right)}{1 - \frac{4\pi^2 r_0^2}{\lambda^2}\beta^2} \tag{9}$$

и

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{-\frac{8\pi^3 r_0}{\lambda^2 T}\beta\left[\cos\varphi + \frac{6\pi r_0}{\lambda}\beta + \frac{12\pi^2 r_0^2}{\lambda^2}\beta^2\cos\varphi + \frac{16\pi^3 r_0^3}{\lambda^3}\beta^3\cos^2\varphi - \frac{8\pi^3 r_0^3}{\lambda^3}\beta^3\right]}{\left(1 - \frac{4\pi^2 r_0^2}{\lambda^2}\beta^2\right)^3}. \tag{10}$$

Средние значения (9) и (10) по x_1 легко найти, имея в виду, что в интервале, равном λ, $\overline{\cos\varphi} = 0$ и $\overline{\cos^2\varphi} = {}^1/_2$.

Из (8), (9) и (10), вводя высоту волны $h = 2r_0$, находим:

$$A_\tau = \frac{\pi\rho k^2}{18}\frac{h^2}{T}\beta^2\left(1 - \frac{\pi^2 h^2}{\lambda^2}\beta^2\right)^3. \tag{11}$$

Для сравнения развитой здесь теории с наблюдениями можно воспользоваться в первую очередь цитированной работой Джеффриса.

Из данных о скоростях течений и ветровом режиме в Центральной Атлантике (10° N, 40° W), он находит для этой области $A_v = 460$ г/см·сек. Эта цифра находит свое подтверждение у А. Дефанта ([4]), который исследовал распространение суточной температурной волны в однородном поверхностном слое моря на одной из якорных стоянок „Метеора" в Средней Атлантике (12°38′ N, 47°36′ W) и получил для коэффициента турбулентной диффузии тепла $A_s = 320$ г/см·сек. Величина A_s, как известно, в однородном море должна быть весьма близкой к A_v (обычно она меньше A_v). Примем вместе с Джеффрисом, что типичная волна в Средней Атлантике имеет параметры $\lambda = 400$ фут $\cong 120$ м; $h = 15$ фут $\cong 4{,}5$ м; $c = 45$ фут/сек. $\cong 13{,}5$ м/сек., и положим в формуле (11) $k = 0{,}36$ и $\rho = 1{,}025$; тогда на поверхности моря ($z_1 = 0$, $\beta = 1$) в хорошем согласии с предыдущими величинами получим $A_v = 520$ г/см·сек.

Для малой силы волнения проверка теории может быть сделана на материале наблюдений К. В. Шутилова ([5]), определявшего коэффициент турбулентной диффузии тепла A_s в условиях сильно развитой стратификации.

Результаты некоторых его „суточных станций", при которых, по моей просьбе, им определялись элементы волнения вместе с величинами A_v, вычисленными по формуле (11), даны в табл. 1.

Таблица 1

Дата	$\overline{T}$, сек.	$\overline{h}$, см	A_s набл.	A_v вычисл.	A_s / A_v
10—11 VIII 1938 . .	3,4	36	8,50	8,75	0,97
11—12 VIII 1938 . .	3,7	64	2,86	24,9	0,11
16—17 VIII 1938 . .	4,5	65	4,50	21,5	0,21

При большой устойчивости слоев воды, согласно Тэйлору [6], отношение A_s/A_v доходит даже до величины от 0,02 до 0,20. Поэтому из нашей таблицы можно сделать вывод, что порядок A_v и для турбулентных процессов с малой интенсивностью может быть вычислен, пользуясь формулой (11).

Морская гидрофизическая лаборатория
Академии Наук СССР

Поступило
27 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Jeffreys, Phil. Mag., 39, 578 (1920). [2] Th. v. Kármán, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 58 (1930). [3] A. Betz, ZAMM, 11, 317 (1931). [4] H. V. Sverdrup, M. W. Johnson and R. H. Fleming, The Oceans, N. Y., 1942. [5] К. В. Шутилов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4—5, 447 (1941). [6] G. I. Taylor, Cons. Perm. Int. p. l'Expl. de la Mer, Rapp. et Proc.-Verb., 76, 25 (1931).