Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Х. М. МУШТАРИ

ОБ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 9 VI 1947)

1. Уравнения равновесия и условия совместности деформаций срединной поверхности оболочки, данные в ([1, 2]) Wei-Zang-Chien и J. Synge в детально развитой ими теории оболочек, опирающейся на закон Гука, но применимой в случае произвольных смещений, могут быть значительно упрощены, если пренебречь квадратами и высшими степенями относительных удлинений срединной поверхности по сравнению с первой. При этом законном в данной теории упрощении приходим к уравнениям равновесия

$$\nabla_{\bar{\pi}} T^{\pi\alpha} + \bar{a}^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} \bar{\eta}^{\gamma\lambda} \bar{a}_{\lambda\delta} \nabla_{\bar{\pi}} L^{\pi\delta} + F^{\alpha} + \bar{a}^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} \bar{\eta}^{\gamma\delta} \bar{a}_{\delta\lambda} M^{\lambda} = 0, \tag{1,1}$$

$$\bar{\eta}^{\delta\pi} \bar{a}_{\pi\gamma} \nabla_{\bar{\delta}} \nabla_{\bar{\lambda}} L^{\lambda\gamma} - b_{\pi\lambda} T^{\pi\lambda} + F^{0} + \bar{a}_{\pi\lambda} \bar{\eta}^{\gamma\pi} \Delta_{\bar{\gamma}} M^{\lambda} = 0 \tag{1,2}$$

и к уравнениям совместности деформаций

$$\bar{\eta}^{\beta\gamma} \{ \nabla_{\bar{\gamma}} \bar{q}_{\alpha\beta} - \bar{a}^{\pi\omega} \bar{b}_{\beta\pi} (\nabla_{\bar{\gamma}} \bar{p}_{\alpha\omega} + \nabla_{\bar{\alpha}} \bar{p}_{\gamma\omega} - \nabla_{\bar{\omega}} \bar{p}_{\alpha\gamma}) \} = 0, \tag{1,3}$$

$$\begin{gathered} \bar{\eta}^{\rho\alpha} \bar{\eta}^{\beta\omega} (2 \nabla_{\bar{\beta}} \nabla_{\bar{\alpha}} \bar{p}_{\rho\omega} + \bar{q}_{\alpha\beta} \bar{q}_{\rho\omega} + 2 \bar{b}_{\rho\omega} \bar{q}_{\alpha\beta}) + \\ + \bar{a}^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} (\bar{a}^{\pi\gamma} \bar{b}_{\pi\gamma} \bar{a}^{\lambda\delta} \bar{b}_{\lambda\delta} - \bar{b}^{\pi\lambda} \bar{b}_{\pi\lambda}) = 0, \end{gathered} \tag{1,4}$$

где все индексы принимают значения 1 и 2; x^{α} — безразмерные гауссовы координаты деформированной срединной поверхности; черточками сверху отмечены соответствующие величины, отнесенные к этим осям до деформации; $\bar{h}$ — отношение толщины оболочки к наименьшему из других ее линейных размеров; $\bar{a}_{\alpha\beta}$, $\bar{b}_{\alpha\beta}$ — безразмерные ковариантные составляющие метрического тензора и второй квадратичной формы поверхности; $\bar{p}_{\alpha\beta}$, $\bar{q}_{\alpha\beta}$ — их изменения при деформации; $b_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} + \bar{q}_{\alpha\beta}$; F^{α} и M^{λ} — безразмерные компоненты внешней силы и момента; $\bar{\eta}^{\alpha\beta}$ — контравариантные составляющие дискриминантного тензора поверхности; $T^{\pi\alpha}$ и $L^{\pi\delta}$ — безразмерные компоненты упругого усилия и момента. При этом, обозначая волнистой чертой слова „величина одного порядка“, имеем

$$\bar{a}_{\alpha\beta} \sim \bar{a}^{\alpha\beta} \sim \bar{\eta}^{\alpha\beta} \sim 1, \quad \bar{b}_{\alpha\beta} \leqslant 1, \quad \bar{p}_{\alpha\beta} \leqslant \varepsilon_p, \quad \bar{q}_{\alpha\beta} \leqslant 1, \tag{1,5}$$

где ε_p — максимальное относительное удлинение в пределах закона Гука. Необходимо также отметить, что

$$T \sim \bar{h}\bar{p}, \quad L \sim \bar{h}^3\bar{q} \tag{1,6}$$

(здесь и в дальнейшем индексы опускаем).

2. Если удлинения от изгиба малы по сравнению с удлинениями от растяжения — сжатия, так что

$$\bar{h}\bar{q} \lesssim \bar{h}\bar{p}, \quad \bar{p} \sim \varepsilon_p, \tag{2,1}$$

то упругое усилие определяется из линейных уравнений (1,1) и (1,2), в которых можно отбросить изгибающие моменты с погрешностью порядка ε_p по сравнению с единицей, если

$$\bar{h} \lesssim \sqrt{\varepsilon_p}. \tag{2,2}$$

При этом, допуская ту же погрешность, можно пользоваться гипотезой Кирхгофа и пренебрегать удлинениями от изгиба, если $\bar{h} \lesssim \varepsilon_p$.

Если $\bar{h} \sim \sqrt{\varepsilon_p}$, оболочку будем считать средней толщины. В этом случае для достижения принятой точности необходимо отказаться от гипотезы Кирхгофа и определять удлинения от изгиба из уравнений (1,3) — (1,4), которые будут также линейными относительно $\bar{q}_{\alpha\beta}$.

В случае же смешанного напряженного состояния или при превалирующих удлинениях от изгиба

$$\bar{h}\bar{q} \sim \varepsilon_p, \quad \bar{p} \lesssim \varepsilon_p. \tag{2,3}$$

Тогда задача линеаризируется лишь для оболочек средней толщины и притом ценой допущения погрешности порядка $\bar{h} \sim \sqrt{\varepsilon_p}$ по сравнению с единицей, присущей гипотезе Кирхгофа.

Следовательно, приближенные решения задачи равновесия пограничной зоны оболочки, основанные на пренебрежении величинами порядка $\sqrt{\bar{h}}$ по сравнению с единицей и предложенные И. В. Гекелером и др., не могут считаться надежными, так как $\sqrt[4]{\varepsilon_p}$ не является малой дробью для обычных материалов.

Физико-технический институт
Казанского филиала
Академии Наук СССР

Поступило
9 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Synge and W. Z. Chien, Theodore von Karman Anniversary Volume 1941. [2] Wei-Zang-Chien, Quarterly of Applied Mathematics, 1, No. 4 (1944); 2, No. 1 (1944).