Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Г. ГУТМАН

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОБОБЩЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 9 VI 1947)

§ 1. Под обобщенными цилиндрическими координатами условимся понимать систему ортогональных изотермических координат α, β, γ, из которых две, α и β, имеют одинаковые дифференциальные параметры

$$h_\alpha = h_\beta = h.$$

Подстановкой указанного условия в уравнения ортогональности и изотермичности криволинейных координат ([1]) легко доказать, что

$$h_\gamma = (a\gamma + b)^2, \quad h_\alpha = h_\beta = h = \sqrt{h_\gamma}\, h_1, \quad \partial h_1/\partial\gamma = 0.$$

В зависимости от значений постоянных a и b обобщенные цилиндрические координаты α, β, γ распадаются на два вида:

1) цилиндрическая система координат α, β, z, отвечающая значениям коэффициентов $a=0$, $b=1$; координата $\gamma = z$, дифференциальный параметр ее $h_\gamma = 1$;

2) сферическая система координат α, β, $-1/R$, для которой $a=1$, $b=0$; координаты представляются: $\gamma = -\frac{1}{R}$, $\alpha = \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $\beta = \lambda$ (долгота); дифференциальные параметры координат: $h_\gamma = \gamma^2 = \frac{1}{R^2}$, $h = \sqrt{h_\gamma}\ \operatorname{ch}\alpha = \frac{1}{R \sin\varphi}$.

§ 2. Предлагаемый выбор функций, определяющих общее решение задачи теории упругости, базируется на анализе поля вектора упругого смещения.

В соленоидальном поле, отнесенном к обобщенным цилиндрическим координатам α, β, γ, составляющая вектора $u_\gamma/\sqrt{h_\gamma}$ связана тем же уравнением Лапласа, как и в поле, имеющем потенциал:

$$\Delta\left(\frac{u_\gamma}{\sqrt{h_\gamma}}\right) = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Указанное условие позволяет разложить соленоидальное поле в обобщенных цилиндрических координатах α, β, γ на два слагаемых: потенциальное u_α, u_β, u_γ ($\operatorname{rot}=0$) и обобщенно-параллельное соленоидальное u_α, u_β ($u_\gamma = 0$). Под обобщенно-параллельным полем условимся понимать поле, в котором вектор направлен по касательной к поверхностям обобщенной координаты γ, составляющая вектора $u_\gamma = 0$.

На основании изложенного анализа соленоидальных полей поле вектора упругого смещения разлагается в обобщенных цилиндрических координатах α, β, γ на два слагаемых, из которых первое характеризуется обобщенно параллельным вектором вращения ($\omega_\gamma = 0$), второе является само обобщенно параллельным соленоидальным полем ($u_\gamma = 0$, $\operatorname{div} = 0$).

§ 3. Подчинив установленные выше два слагаемых поля вектора упругого смещения уравнениям равновесия в компонентах вращения [1], найдем общее выражение компонентов вращения:

$$2\mathfrak{G}\,\frac{\omega_\alpha}{h} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[h_\gamma \frac{\partial}{\partial_1}\left(\frac{F_\omega}{\sqrt{h_\gamma}}\right)\right] - (1-\sigma)\,\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\Delta F_s}{\sqrt{h_\gamma}}\right),$$

$$2\mathfrak{G}\,\frac{\omega_\beta}{h} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left[h_\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{F_\omega}{\sqrt{h_\gamma}}\right)\right] + (1-\sigma)\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\Delta F_s}{\sqrt{h_\gamma}}\right),$$

$$2\mathfrak{G}\,\frac{\omega_\gamma}{h_\gamma} = \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[h_\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{F_\omega}{\sqrt{h_\omega}}\right)\right],$$

где $\mathfrak{G}$ — модуль касательной упругости; σ — коэффициент Пуассона; F_ω — гармоническая функция, $\Delta F_\omega = 0$; F_s — бигармоническая функция, $\Delta^2 F_s = 0$; $h_\gamma \dfrac{\partial}{\partial\gamma}\left(\dfrac{\Delta F_s}{\sqrt{h_\gamma}}\right)$ определяет объемное расширение θ:

$$h_\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\Delta F_s}{\sqrt{h_\gamma}}\right) = -\frac{2\mathfrak{G}}{1-2\sigma}\,\theta;$$

$h_\gamma \dfrac{\partial}{\partial\gamma}\left(\dfrac{F_\omega}{\sqrt{h_\gamma}}\right)$ — потенциал вектора вращения в обобщенно-параллельном соленоидальном поле.

Общее выражение компонентов смещения представляется, соответственно:

$$2\mathfrak{G}u_\alpha = h\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{2F_\omega}{\sqrt{h_\gamma}}\right)\right],$$

$$2\mathfrak{G}u_\beta = h\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{2F_\omega}{\sqrt{h_\gamma}}\right)\right],$$

$$2\mathfrak{G}u_\gamma = h_\gamma \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} - 2(1-\sigma)\frac{\Delta F_s}{\sqrt{h_\gamma}},$$

где для краткости введено обозначение бигармонической функции Φ:

$$\Phi = \sqrt{h_\gamma}\,\frac{\partial F_s}{\partial\gamma} - (3-4\sigma)\,\frac{\partial\sqrt{h_\gamma}}{\partial\gamma}\,F_s,$$

$$\Delta\Phi = \sqrt{h_\gamma}\,\frac{\partial\Delta F_s}{\partial\gamma} - (5-4\sigma)\,\frac{\partial\sqrt{h_\gamma}}{\partial\gamma}\,\Delta F_s,$$

$$\Delta^2\Phi = 0.$$

Таким образом, общее решение задачи теории упругости выражается с помощью двух функций: бигармонической F_s и гармонической F_ω. Функции эти независимы, как независимы отвечающие им слагаемые векторные поля.

§ 4. Соответственно двум системам координат: цилиндрических α, β, z и сферических $\alpha, \beta, -1/R$, обобщенным в рассмотренной системе α, β, γ, полученное решение совмещает два варианта разложения поля упругого смещения на независимые слагаемые.

I вариант ($\gamma=z$). Поле упругих смещений разлагается в связи с координатой z на поле с плоско-параллельным вектором вращения ($\omega_z=0$) и соленоидальное плоско-параллельное поле ($\mathrm{div}=0$, $u_z=0$).

Для принятого $\gamma=z$ и, соответственно, $\sqrt{h_\gamma}=1$, $\partial\sqrt{h_\gamma}/\partial\gamma=0$ функция Φ представится:

$$\Phi=\partial F_s/\partial z.$$

Приняв $\alpha=x$, $\beta=y$, получим общее выражение компонентов смещения:

$$2\mathfrak{G}u_x=\frac{\partial^2 F_s}{\partial x\partial z}+2\,\frac{\partial F_\omega}{\partial y},$$

$$2\mathfrak{G}u_y=\frac{\partial^2 F_s}{\partial y\partial z}-2\,\frac{\partial F_\omega}{\partial x},$$

$$2\mathfrak{G}u_z=\frac{\partial^2 F_s}{\partial z^2}-2(1-\sigma)\Delta F_s.$$

II вариант ($\gamma=-1/R$). Поле упругих смещений разлагается в связи с координатой R на поле со сферически-параллельным вектором вращения ($\omega_R=0$) и соленоидальное сферически-параллельное поле ($\mathrm{div}=0$, $u_R=0$).

Для принятой системы сферических координат, где $\sqrt{h_\gamma}=-\gamma$, $\partial\sqrt{h_\gamma}/\partial\gamma=-1$, общее выражение компонентов смещения представится в сферических координатах (R, φ, λ):

$$2\mathfrak{G}u_R=\frac{\partial\Phi}{\partial R}-2(1-\sigma)R\Delta F_s,$$

$$2\mathfrak{G}u_\varphi=\frac{\partial\Phi}{R\,\partial\varphi}+2\,\frac{\partial F_\omega}{\sin\varphi\,\partial\lambda},$$

$$2\mathfrak{G}u_\lambda=\frac{\partial\Phi}{R\sin\varphi\,\partial\lambda}-2\,\frac{\partial F_\omega}{\partial\varphi},$$

где $\Phi=R\,\dfrac{\partial F_s}{\partial R}+(3-4\sigma)F_s$.

Полученные два варианта решения нетрудно преобразовать соответственно для других систем координат.

§ 5. Рассматривая в свете анализа поля упругих смещений решение Галеркина ([2]) и Нейбера—Папковича ([2]), легко убедиться, что функции Галеркина φ_1, φ_2 и φ_3, как и соответствующие их лапласианам функции Нейбера — Папковича Φ_1, Φ_2 и Φ_3, отвечают разложению поля вектора вращения на три плоско-параллельных слагаемых по плоскостям координат x, y, z.

Так как вектор в пространстве вполне определяется его проекциями на плоскость и перпендикулярную к ней ось, то для общности решения задачи нет необходимости в разложении поля вектора вращения на три плоско-параллельных слагаемых по трем плоскостям координат. Без ущерба общности решения возможно подчинить две функции из трех дополнительному условию:

для функций Галеркина:

$$\Delta\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)=0;$$

для функции Нейбера — Папковича

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}=0.$$

Введением указанного условия решения Галеркина и Нейбера — Папковича приводятся к I варианту нашего решения. Бигармоническая функция F_s в этом варианте представляет собой третью функцию Галеркина

$$-F_s=\varphi_3$$

и, соответственно,

$$-\frac{\partial F_s}{\partial z}=\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}=\frac{\mathfrak{G}}{2(1-\sigma)}(z\Phi_3+\Phi_0).$$

Производные от гармонической функции F_ω связаны с соответствующими функциями сравниваемых решений следующими равенствами:

$$\frac{\partial F_\omega}{\partial y}=(1-\sigma)\,\Delta\varphi_1=\mathfrak{G}\Phi_1,$$

$$-\frac{\partial F_\omega}{\partial x}=(1-\sigma)\,\Delta\varphi_2=\mathfrak{G}\Phi_2.$$

Всесоюзный научно-исследовательский
институт гидротехники
им. Б. Е. Веденеева,
Ленинград

Поступило
9 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ляв, Математическая теория упругости, 1935. [2] Б. Б. Галеркин, ДАН, А (1930). [3] П. Ф. Папкович, Теория упругости, 1939.