Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

АЭРОДИНАМИКА

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

ВЛИЯНИЕ ВИХРЕВОЙ ПЕЛЕНЫ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ КРЫЛА СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ *

(Представлено академиком М. В. Келдышем 11 V 1947)

Рассмотрим линеализированную задачу в обычной постановке ([1-3]) о прямолинейном поступательном движении тонкого крыла конечного размаха с постоянной скоростью $u > a$, где a — скорость звука в неподвижном газе.

Потенциал скорости φ в осях координат xy, изображенных на рис. 1, с началом в точке D (в конце задней кромки) представляется в виде

$$\varphi(x, y, 0) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S(x,y)} \frac{\{\partial\varphi/\partial z\}_{z=0}}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}\, d\eta\, d\xi, \tag{1}$$

где $S(x, y)$ — область, которую вырезает конус Маха с вершиной в точке $M'(x, y)$ на плоскости xy.

При этом предположено, что нормальная производная $\partial\varphi/\partial z$ на крыле задана

$$\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}_{z=0} = -\frac{u\beta_0}{\sqrt{u^2/a^2-1}} = A(x, y), \tag{2}$$

где β_0 — функция точки крыла.

Рассмотрим крыло, передняя кромка которого в преобразованных координатах задана уравнением $y=\psi_1(x)$, задняя — уравнением $y=\chi(x)$.

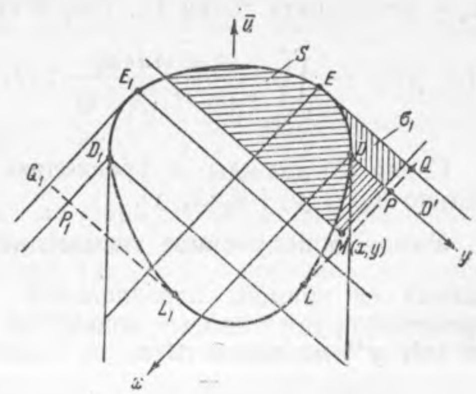

Рис. 1

Для того чтобы по формуле (1) вычислить потенциал φ в любой точке такого крыла, необходимо знать значения $\partial\varphi/\partial z$ в области $EDLQ$ и $E_1D_1L_1Q_1$.

В области $EDPQ$ (соответственно $E_1D_1P_1Q_1$) — в области, на которую влияние вихревой пелены за крылом не сказывается — функция $\partial\varphi/\partial z = \theta(x, y)$ определена в заметке ([4]).

Найдем значения $\partial\varphi/\partial z$ в области DLP (соответственно $D_1L_1P_1$).

Выразим потенциал φ в точке $M(x, y)$ на вихревой пелене по формуле (1), разбивая область интегрирования на три части:

* Доложено в Математическом институте АН СССР 6 V 1947 г.

$S(x, y) = s(x, y) + \sigma_1(x, y) + \sigma(x, y)$, как указано на рис. 1, и обозначая $\partial\varphi/\partial z$ в области σ через $\vartheta(x, y)$.

Полученное выражение дифференцируем по направлению, параллельному биссектрисе координатного угла, имея в виду, что на вихревой пелене вдоль любой прямой указанного направления потенциал φ сохраняет постоянное значение вследствие непрерывности давления за крылом.

Предполагая, что на задней кромке крыла выполняется условие

$$\vartheta(x, y) = A(x, y) \tag{3}$$

и на образующей DD' конуса Маха с вершиной в точке D условие

$$\vartheta(0, y) = \theta(0, y), \tag{4}$$

придем к уравнению

$$\int_0^x \int_{\chi(\xi)}^y \frac{\vartheta_\xi(\xi, \eta) + \vartheta_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} \, d\eta \, d\xi = F(x, y), \tag{5}$$

где известная функция F представляется в виде

$$F = \int_0^x \frac{A(\xi, \chi(\xi))}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} \left\{ \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} - 1 \right\} d\xi - \int_{x_0}^0 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\psi_1(\xi)}^y \frac{\theta(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} \, d\eta \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} + $$

$$+ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \tag{6}$$

(x_0 — координата точки E), где, в свою очередь, положено

$$f(x, y) = -\iint_{s(x, y)} \frac{A(\xi, \eta) \, d\eta \, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}; \quad f_1(x, y) = -\iint_{\sigma_1(x, y)} \frac{\theta(\xi, \eta) \, d\eta \, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}. \tag{7}$$

Сводя (5) дважды к уравнению Абеля, найдем решение относительно $\vartheta_x(x, y) + \vartheta_y(x, y)$.

Умножая полученное выражение на $\frac{\sqrt{2}}{2} ds$, где ds — элемент дуги, взятый на прямой, параллельной биссектрисе координатного угла, проинтегрируем вдоль названной прямой в пределах от точки $M^*(x^*, y^*)$ до точки $M(x, y)$. Тогда придем к решению:

$$\vartheta(x, y) = \vartheta(x^*, y^*) + \frac{1}{\pi^2} \int_{x^*}^x \frac{F(0, \chi(x_1)) \, dx_1}{\sqrt{x_1(x_1 + y - x - \chi(x_1))}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{x^*}^x \int_{\chi(x_1)}^{x_1+y-x} \frac{F_\eta(0, \eta) \, d\eta \, dx_1}{\sqrt{x_1(x_1 + y - x - \eta)}} + \frac{1}{\pi^2} \int_{x^*}^x \int_0^{x_1} \frac{F_\xi(\xi, \chi(x_1)) \, d\xi \, dx_1}{\sqrt{(x_1 - \xi)(x_1 + y - x - \chi(x_1))}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{x^*}^x \int_0^{x_1} \int_{\chi(x_1)}^{x_1+y-x} \frac{F_{\xi\eta}(\xi, \eta) \, d\eta \, d\xi \, dx_1}{\sqrt{(x_1 - \xi)(x_1 + y - x - \eta)}}. \tag{8}$$

Полагая в (8) функцию $\vartheta(x^*, y^*)=A(x^*, y^*)$ и определяя координаты x^* и y^* как решения уравнений: $y^*-x^*+x-y=0$, $y^*-\chi(x^*)=0$, найдем значения $\partial\varphi/\partial z$ на вихревой пелене. Полагая в том же выражении $\vartheta(x^*, y^*)=\theta(x^*, y^*)$ и координаты $x^*=0$, $y^*=y-x$, получим $\partial\varphi/\partial z$ вне вихревой пелены — в области, для которой $0\leqslant x\leqslant y$.

Рассмотрим теперь случай, когда конусы Маха с вершинами в точках D и D_1 пересекают крыло, как указано на рис. 2.

На основе решения (8) по формуле (1) можно вычислить потенциал скорости на крыле в области (S_1), лежащей внутри конусов Маха с вершинами в точках D и D_1 и вне конусов с вершинами в K и K_1.

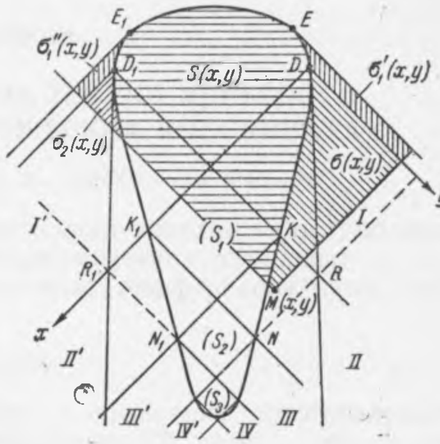

Рис. 2

Для того чтобы вычислить потенциал φ на крыле в области (S_2), лежащей внутри конусов Маха с вершинами в K и K_1 и вне конусов с вершинами в N и N_1, необходимо найти нормальную скорость в области KRN (соответственно $K_1R_1N_1$).

Выразим для точки $M(x, y)$ на вихревой пелене потенциал по формуле (1), представляя область интегрирования S (заштрихована на рис. 2) в виде четырех частей: $S=s+\sigma_1+\sigma_2+\sigma$.

В области s на крыле $\partial\varphi/\partial z=A(x, y)$ задана. В области $\sigma_1=\sigma_1'+\sigma_1''$ функция $\partial\varphi/\partial z=\theta(x, y)$ определена в заметке ([4]). В области σ_2 функция $\partial\varphi/\partial z=\vartheta(x, y)$ определена решением (8). В области σ обозначим $\partial\varphi/\partial z=\vartheta_1(x, y)$.

Требуя в отношении $\vartheta_1(x,y)$ выполнения условий (3) и (4), придем для $\vartheta_{1x}+\vartheta_{1y}$ к уравнению вида (5) с правой частью, равной $F(x, y)+F_1(x, y)$, где

$$F_1(x, y)=-\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_{s(x, y)}\frac{\vartheta(\xi, \eta)\,d\eta\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}-\frac{\partial}{\partial y}\iint\limits_{\sigma_2(x, y)}\frac{\vartheta(\xi, \eta)\,d\eta\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}. \qquad (9)$$

Решение $\vartheta_1(x, y)$ найдется также по формуле (8), если в последней вместо функции F положить $F+F_1$. Члены, содержащие F_1, учитывают влияние на точку $M(x, y)$ вихрей, сходящих с противоположного конца крыла.

Рассуждая таким же образом, найдем значения $\partial\varphi/\partial z$ в областях III и III', IV и IV', ... Следовательно, потенциал скорости φ можно вычислить в любой точке крыла.

Выражаю глубокую благодарность профессору Л. И. Седову за ценные указания, сделанные в связи с просмотром рукописи.

Поступило
11 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Теория плоских движений идеальных жидкостей, М., 1939. [2] Н. Е. Кочин, Прикл. мат. и мех., 6, № 4 (1942). [3] Е. А. Красильщикова Прикл. мат. и мех., 11, № 1 (1947). [4] Она же, ДАН, 58, № 4 (1947).