Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

Г. Е. ШИЛОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОЛЕЦ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 VI 1947)

Целью настоящей заметки является доказательство следующего предложения:

Теорема. *Пусть R — полное нормированное кольцо функций $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Если R содержит все бесконечно дифференцируемые по t функции, то оно содержит, для некоторого n, все функции с n непрерывными производными.*

Доказательство основано на некоторых общих предположениях из теории нормированных колец.

Пусть R_1 и R_2 — два нормированных кольца функций, определенных на одном и том же множестве S, и пусть каждая функция $x(t) \in R_1$ является также элементом кольца R_2. Тогда имеют место:

Лемма 1 *. *Если элементы $x(t)$ кольца R_1 образуют в кольце R_2 всюду плотное множество (по норме R_2) и $\mathfrak{M}(R_1)$ — множество максимальных идеалов кольца R_1 — совпадает с S, то также $\mathfrak{M}(R_2) \equiv S$.*

Лемма 2 **. *Если $\mathfrak{M}(R_1) = \mathfrak{M}(R_2) = S$, то всякая последовательность функций $x_1(t), x_2(t), \ldots$ из R_1, сходящаяся по норме R_1, сходится и по норме R_2.*

Пусть $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_{m+n} \leqslant \alpha_m \alpha_n \quad (m, n = 1, 2, \ldots), \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 0.$$

Введем в кольцо полиномов от одного переменного x норму

$$\| P(x) \| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \sum_{n=0}^{\infty} | P^{(n)}(t) | \frac{\alpha_n}{n!}$$

и обозначим через $D_{<\alpha_n>}$ кольцо, получающееся при пополнении. Оно обладает следующими свойствами:

Лемма 3 ***. $\mathfrak{M}(D_{<\alpha_n>}) = [a, b]$, *радикал $D_{<\alpha_n>}$ содержит только 0, для достаточно быстро убывающей последовательности $<\alpha_n>$ кольцо $D_{<\alpha_n>}$ регулярно.*

---

* ([2]), введение, лемма 6.

** ([1]), § 11, теорема 28 или ([2]), введение, § 4.

*** ([2]), гл. 2, §§ 4, 5.

Лемма 4 [*]. *Если* $x(t) \in D_{<\alpha_n>}$ *и* $x(t+h) \in D_{<\alpha_n>}$ *для всех достаточно малых* h, *то* $\lim \| x(t+h) - x(t) \| = 0$.

Лемма 5 [**]. *Регулярное* $D_{<\alpha_n>}$ *во всяком случае содержит всякую бесконечно дифференцируемую функцию* $x(t)$, *для которой*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(n)}(t)| \frac{\alpha n}{n!} < \infty.$$

Пусть R — некоторое нормированное кольцо функций на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, содержащее функции e^{it} и e^{-it}. Каждой функции $x(t) \in R$ мы можем сопоставить формальный ряд Фурье:

$$x(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int},$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) e^{ins} ds \quad (n = \ldots -1, 0, +1, \ldots).$$

Лемма 6. *Если* $\mathfrak{M}(R) = [0, 2\pi]$ *и для всех вещественных* h $x(t+h) \in R$, *причем* $x(t+2\pi) = x(t)$ *и* $\| x(t+h) - x(t) \| \to 0$ *при* $h \to 0$, *то*

$$\lim_{n \to \pm\infty} \| a_n e^{int} \| = 0.$$

Доказательство. Мы имеем, очевидно, для каждого t

$$a_n e^{int} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(t-s)} x(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ins} x(t-s) ds. \tag{1}$$

Функцию $x(t-s)$ мы можем рассматривать как абстрактную функцию от вещественного переменного s со значениями в кольце R. По условию, эта функция непрерывна по норме; таким образом, интеграл в правой части равенства есть некоторый элемент кольца R. Значение его на максимальном идеале, соответствующем аргументу t, есть численная величина этого интеграла при соответствующем значении t. Так как равенство (1) имеет место при каждом значении t и кольцо R по условию не имеет радикала, то результат интегрирования совпадает с элементом $a_n e^{int}$, стоящим в левой части равенства (1). Тем самым доказательство леммы 6 сведено к доказательству следующего предложения:

Если $x(s)$ — *абстрактная функция, определенная при* $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$, *принимающая значения в полном нормированном пространстве* R *и непрерывная по норме, то*

$$\lim_{n \to \pm\infty} \int_0^{2\pi} e^{ins} x(s) ds = 0.$$

---

* ([2]), гл. 2, § 4.

** ([2]), гл. 2, § 4.

Доказательство этого факта может быть проведено обычными способами (см., например, ([2]), гл. 2, § 5).

Переходим к доказательству теоремы. Заметим, что без ограничения общности можно считать $a=0$, $b=2\pi$ и допустить, что бесконечно дифференцируемые функции образуют в кольце R всюду плотное множество — иначе мы ограничивались бы рассмотрением замыкания совокупности D_∞ всех бесконечно дифференцируемых функций по норме кольца R. Имея в виду это предположение, покажем, прежде всего, что *R имеет одну образующую $x(t)\equiv t$ и множество максимальных идеалов кольца R совпадает с множеством точек отрезка* $[0, 2\pi]$.

Пусть для заданной функции $x(t)\in R$ дана последовательность функций $x_n(t)\in D_\infty$, сходящаяся к $x(t)$ по норме R. В силу лемм 3 и 5 можно построить последовательность α'^n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, настолько быстро стремящуюся к нулю, что соответствующее кольцо $D_{<\alpha'_n>}$ содержит все функции $x_n(t)$. Таким образом, функция $x(t)$ входит в замыкание R' кольца $D_{<\alpha'_n>}$ по норме R. R' есть полное нормированное кольцо, причем по лемме 1 и лемме 3 $\mathfrak{M}(R')=\mathfrak{M}\left(D_{<\alpha'_n>}\right)=[0, 2\pi]$. Образуем последовательность полиномов $P_n(t)$, для которых в кольце $D_{<\alpha'_n>}$

$$\lim_{n\to\infty}\| P_n(t)-x_n(t)\|=0.$$

В силу леммы 2, это предельное соотношение сохраняется и в кольце R', таким образом, t есть образующая кольца R. Так как полиномы от t входят в любое кольцо $D_{<\alpha_n>}$, то мы получаем, что любое кольцо $D_{<\alpha_n>}$ всюду плотно в R. По лемме 1, $\mathfrak{M}(R)=[0,2\pi]$.

Теперь рассмотрим произвольную периодическую функцию $x(t)\in D_\infty$. Эта функция $x(t)$ входит в некоторое кольцо $D_{<\alpha_n>}$; по лемме 4, $\| x(t+h)-x(t)\|\to 0$ при $h\to 0$ по норме $D_{<\alpha_n>}$. По лемме 2, это предельное соотношение сохраняется и в кольце R; следовательно, $x(t+h)$ является непрерывной функцией от h также и по норме кольца R. В силу леммы 6 и доказанного факта $\mathfrak{M}(R)=[0,2\pi]$.

Для коэффициентов a_n разложения Фурье функции $x(t)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\to\pm\infty}\| a_n e^{int}\|=0. \tag{2}$$

Тем самым ограничивается рост последовательности чисел $\| e^{int}\|$. Именно, покажем, что существует некоторое натуральное число N и константа C такие, что для любого n

$$\|e^{int}\|\leqslant C(|n|^N+1). \tag{3}$$

Действительно, допуская противное, мы для любого натурального k сможем указать номер $n=n_k$ такой, что

$$\| e^{in_k t}\|>|n_k|^k+1.$$

Без ограничения общности можно считать $|n_1|<|n_2|<\ldots$

Положим

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq n_k, \\ \dfrac{1}{|n_k|^k + 1} & \text{при } n = n_k. \end{cases}$$

Ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ определяет бесконечно дифференцируемую функцию, так как коэффициенты Фурье стремятся к нулю быстрее любой степени n. Но

$$\| a_{n_k} e^{in_k t} \| = \frac{1}{|n_k|^k + 1} \| e^{in_k t} \| > 1,$$

что противоречит соотношению (2). Таким образом, оценка (3) справедлива.

Если теперь $x(t)$ любая $N+2$ раза дифференцируемая периодическая функция, то ее коэффициенты Фурье a_n удовлетворяют неравенствам

$$|a_n| \leqslant \frac{C}{|n|^{N+2} + 1}.$$

В таком случае ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ сходится абсолютно в смысле нормы R; так как R полно, то $x(t) \in R$.

Пусть, наконец, $x(t)$ — произвольная $N+2$ раза дифференцируемая функция на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Построим полином $P(t)$ так, чтобы для $y(t) = x(t) - P(t)$ выполнялись условия $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi), \ldots, y^{(N+2)}(0) = y^{(N+2)}(2\pi)$. В таком случае функция $y(t)$ может быть продолжена за пределы отрезка $[0, 2\pi]$ как периодическая $N+2$ раза дифференцируемая функция. По доказанному $y(t) \in R$, откуда и $x(t) = y(t) + P(t) \in R$.

Теорема доказана.

Поступило
14 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов, Усп. математ. наук, 1:2 (12) (1946). [2] Г. Е. Шилов, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 21 (1947).