Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

А. С. МЕЙЛИХЗОН

К ВОПРОСУ О КОМПЛЕКСАХ ГАЛУА

(Представлено академиком Н. М. Крыловым 7 VI 1947)

Академик Н. М. Крылов рассмотрел в ([1]) так называемые тернарные комплексы Галуа:

$$x+iy+i^2z, \tag{1}$$

где i является корнем уравнения третьей степени:

$$t^3=\nu t+\mu t=\eta. \tag{2}$$

В указанной работе даны условия моногенности (в смысле Коши) тернарной комплексной функции

$$u(x, y, z)+iv(x, y, z)+i^2w(x, y, z) \tag{3}$$

тернарного комплексного аргумента (1).

В настоящей статье прежде всего даются, в легко обозримой форме, условия моногенности переменного комплекса Галуа любого порядка, рассмотренного как функция комплексного аргумента того же порядка.

Обозначаем комплексный аргумент через

$$\alpha=x_0+ix_1+i^2x_2+\ldots+i^{n-1}x_{n-1} \tag{4}$$

($x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — независимые вещественные переменные), а комплексную функцию через

$$\omega=F(\alpha)=u_0(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})+iu_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})+$$
$$+i^2u_2(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})+\ldots+i^{n-1}u_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{5}$$

где i удовлетворяет алгебраическому уравнению:

$$i^n=P_1i^{n-1}+P_2i^{n-2}+\ldots+P_{n-1}i+P_n. \tag{6}$$

Необходимые условия моногенности функций $F(\alpha)$ найдем легко, вычисляя значения производной $d\omega/d\alpha$ при $d\alpha=i^k\,dx_k$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$) и приравнивая эти значения между собой, что даст:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} i^k\frac{\partial u_k}{\partial x_0}=\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{k=n-1} i^k\frac{\partial u_k}{\partial x_1}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{i^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n-1} i^k\frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} \quad (i^0=1). \tag{7}$$

Равенство (7) можно записать в форме:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} i^k \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = i \sum_{k=0}^{k=n-1} i^k \frac{\partial u_k}{\partial x_{l-1}}$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;\quad l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \tag{8}$$

что, с учетом уравнения (6), даст, после небольших выкладок, необходимые условия моногенности:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_{l-1}} + p_{n-k} \frac{du_{n-1}}{\partial x_{l-1}}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\quad l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1) \tag{9}$$

при дополнительном равенстве

$$\frac{du_{-1}}{\partial x_{l-1}} = 0. \tag{10}$$

Достаточность уравнений (9) для моногенности функции $F(\alpha)$ устанавливается легко. Число этих уравнений, очевидно, равно $n(n-1)$.

Для тернарных комплексов ($n=3$) эти условия запишутся:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial x_1} = p_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + p_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_0} + p_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_0}, \\
&\frac{\partial u_0}{\partial x_2} = p_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{du_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Чтобы получить эти равенства в обозначениях статьи акад. Н. М. Крылова [1], нужно положить:

$$\begin{aligned}
&x_0 = x, \quad && x_1 = y, \quad && x_2 = z, \\
&u_0 = u, && u_1 = v, && u_2 = w, \\
&p_1 = \nu, && p_2 = \mu, && p_1 = \eta,
\end{aligned}$$

после чего уравнения (11) запишутся:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial y} = \eta \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{(a)} \quad && \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{(c)} \\
&\frac{\partial u}{\partial z} = \eta \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \text{(b)} && \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \text{(d)} \\
&\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} + \nu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{(e)} && \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial w}{\partial z}. \quad \text{(f)}
\end{aligned} \tag{12}$$

Уравнения (12) частично совпадают с уравнениями (5) цитированной статьи (a, c, e), частично приводят к ним после элементарных преобразований.

Останавливаясь специально на тернарных комплексах, имеем, далее, для двух таких комплексов, если учесть уравнение (2):

$$(x+iy+i^2z)(x'+iy'+i^2z') = A+Bi+Ci^2, \tag{13}$$

где положено:

$$\begin{aligned}
A &= xx' + \eta(yz'+y'z) + \nu\eta zz', \\
B &= xy' + x'y + \mu(yz'+y'z) + (\mu\nu+\eta)zz', \\
C &= xz' + x'z + yy' + \nu(yz'+y'z) + (\nu^2+\mu)zz'.
\end{aligned} \tag{14}$$

Формулы (13) и (14) дают правило умножения тернарных комплексов Галуа. Используя это правило, можно определить интеграл

$$\int\limits_{A\,(v_1 y_1 z_1)}^{B\,(x_2 y_2 z_2)} t(\alpha)\, d\alpha \tag{15}$$

от тернарной комплексной функции тернарного комплексного переменного, взятый по какому-либо криволинейному пути между точками $A(x_1\, y_1\, z_1)$ и $B(x_2\, y_2\, z_2)$ трехмерного пространства, причем функция

$$f(\alpha) = u(x, y, z) + iv(x, y, z) + i^2 w(x, y, z) \tag{16}$$

от переменного

$$\alpha = x + iy + i^2 z \tag{17}$$

не должна быть обязательно моногенной. Для вычисления интеграла (15) перемножаем по вышеустановленному правилу

$$f(\alpha) = u(x, y, z) + iv(x, y, z) + i^2 w(x, y, z)$$

и

$$d\alpha = dx + i\, dy + i^2 dz, \tag{18}$$

в результате чего найдем:

$$\int\limits_{A\,(x_1 y_1 z_1)}^{B\,(x_2 y_2 z_2)} f(\alpha)\, dx = y_0 + iy_1 + i^2 y_2, \tag{19}$$

где положено:

$$y_0 = \int\limits_{A\,(x_1 y_1 z_1)}^{B\,(x_2 y_2 z_2)} u\, dx + \eta(v\, dz + w\, dy) + \nu\eta w\, dz,$$

$$y_1 = \int\limits_{A\,(x_1 y_1 z_1)}^{B\,(x_2 y_2 z_2)} u\, dy + v\, dx + \mu(v\, dz + w\, dy) + (\mu\nu + \eta)\, w\, dz, \tag{20}$$

$$y_2 = \int\limits_{A\,(x_1 y_1 z_1)}^{B\,(x_2 y_2 z_2)} u\, dz + w\, dx + v\, dy + \nu(v\, dz + w\, dy) + (\nu^2 + \mu)\, w\, dz.$$

В частности, интеграл (19) можно будет вычислить по какому-либо замкнутому криволинейному пути, в каком случае криволинейные интегралы y_0, y_1 и y_2 можно преобразовать по формуле Стокса:

$$y - \oint P_k\, dx + Q_k\, dy + R_k\, dz =$$

$$= \iint\limits_{s} \left(\frac{\partial R_k}{\partial y} - \frac{\partial Q_k}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P_k}{\partial z} - \frac{\partial R_k}{\partial x}\right) dx\, dz + \left(\frac{\partial Q_k}{\partial x} - \frac{\partial P_k}{\partial y}\right) dx dy$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2), \tag{21}$$

где положено, в соответствии с (20):

$$\begin{aligned} &P_0 = u, \quad Q_0 = \eta w \quad && R_0 = \eta v + \nu\eta w, \\ &P_1 = v, \quad Q_1 = u + \mu w, \quad && R_1 = \mu v + (\mu\nu + \eta)\, w, \\ &P_2 = w, \quad Q_2 = v + \nu w, \quad && R_2 = u + \nu v + (\nu^2 + \mu)\, w. \end{aligned} \tag{22}$$

Отсюда будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial R_0}{\partial y}-\frac{\partial Q_0}{\partial z}=\eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial P_0}{\partial z}-\frac{\partial R_0}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}-\eta\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\nu\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
&\frac{\partial Q_0}{\partial x}-\frac{\partial P_0}{\partial y}=\eta\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\\
&\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}=\mu\frac{\partial v}{\partial y}+(\mu\nu+\eta)\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}-\mu\frac{\partial w}{\partial z},\\
&\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial z}-\mu\frac{\partial v}{\partial x}-(\mu\nu+\eta)\frac{\partial w}{\partial x},\\
&\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y},\\
&\frac{\partial R_2}{\partial y}-\frac{\partial Q_2}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial y}+\nu\frac{\partial v}{d y}+(\nu^2+\mu)\frac{\partial w}{d y}-\frac{\partial v}{\partial z}-\nu\frac{\partial w}{\partial z},\\
&\frac{\partial P_2}{dz}-\frac{\partial R_2}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{dx}-\nu\frac{\partial v}{\partial x}-(\nu^2+\mu)\frac{\partial w}{\partial x},\\
&\frac{\partial Q_2}{\partial x}-\frac{\partial P_2}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}+\nu\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Если предположить теперь, что функция $f(\alpha)=u(x, y, z)+$ $+iv(x, y, z)+i^2w(x, y, z)$ моногенна, то, исходя из уравнений моногенности академика Н. М. Крылова (формулы (5) работы ([1])), убеждаемся, после некоторых выкладок, что правые части всех 9 выражений (23) обращаются в нуль, что на основании формул (21) дает $y_k=0$ $(k=0, 1, 2)$, откуда получаем соотношение:

$$\oint_c f(\alpha)\,d\alpha=y_0+y_1 i+y_2 i^2=0, \tag{24}$$

справедливое для всякой моногенной функции тернарного комплексного переменного.

Таким образом, аналогично тому, что происходит в теории функций обыкновенной (гауссовой) комплексной переменной, получаем и здесь предложение: интеграл моногенной функции тернарного комплексного переменного Галуа по любому замкнутому пути равен нулю.

Так как, очевидно, из равенства нулю правых частей выражений (23) вытекают также условия моногенности, то будет справедливо и обратное предложение (аналогично теореме Морера): если интеграл некоторой функции тернарного комплексного переменного по любому замкнутому пути некоторой области равен нулю, то функция в этой области моногенна.

Следует заметить, что 9 уравнений, получаемых приравниванием нулю правых частей формул (23), не независимы, ибо, как было уже сказано, только 6 из них влекут за собой, как следствие, остальные 3. Это указывает на то, что в теории функций тернарных комплексов Галуа можно получить, повидимому, более сильное обратное предложение, чем указанное выше (аналогичное теореме Морера), что нуждается в особом исследовании.

Поступило
29 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Крылов, ДАН, 55, № 8 (1947).