Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. З. КАЦЕНЕЛЕНБАУМ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ БЕСКОНЕЧНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 26 VI 1947)

Электромагнитные волны вдоль бесконечных диэлектрических ци-
ндров были впервые исследованы Хондросом и Дебаем ([1–3]). Ими
ли рассмотрены простейшие (симметричные) волны, распространяю-
еся вдоль круглых стержней. Было показано, что эти волны могут
спространяться лишь при достаточно высоких частотах, т. е. что
я них существуют критические частоты. При частоте ниже крити-
ской эти волны распространяться вообще не могут, при критиче-
ой частоте они распространяются со скоростью c, где c — скорость
ета в пустоте. С ростом частоты скорость уменьшается и стремится
$c/\sqrt{\varepsilon}$, где ε — диэлектрическая проницаемость материала стержня.
ондрос показал существование критических волн, исследовав только
щественные постоянные распространения. Однако его анализ сим-
етричных волн является по существу полным, ибо для волн этого
ипа можно показать, что постоянные распространения при веще-
твенном ε всегда вещественны и лежат между k и $k\sqrt{\varepsilon}$ $(k=\omega/c)$.
то доказательство можно провести, опираясь на энергетические
ображения и на анализ соответствующего трансцендентного урав-
ения.

Несимметричные волны, распространяющиеся вдоль круглых стер-
жней, были исследованы А. Вольпертом*. Он доказал, что одна из
есимметричных волн может распространяться также и при низких
частотах, т. е. что для нее не существует критической частоты**.
А. Вольперт исходил в своем анализе из трансцендентного уравнения
для волн, распространяющихся вдоль цилиндра кругового сечения.
Однако распространение волн при низких частотах может быть иссле-
довано для значительно более общего случая несколько иным методом.

Пусть ε среды есть произвольная функция x и y, равная единице вне некоторого кругового цилиндра радиуса d:

$$\varepsilon(x, y) = 1 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2} > d. \tag{1}$$

В частности, если имеется стержень произвольного сечения, внутри которого ε постоянно, то ε есть кусочно-постоянная функция, равная единице вне стержня. Рассмотрим волны, идущие в направлении оси z, и пусть зависимость от координаты z дается множителем e^{ihz}, так что для полей $\vec{\mathfrak{E}}$ и $\vec{\mathfrak{H}}$ будет:

* Доложено на сессии общества им. А. С. Попова в мае 1946 г.
** См. также ([4]).

$$\vec{\mathfrak{E}}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)\, e^{ihz}, \quad \vec{\mathfrak{H}}(x, y, z) = \vec{H}(x, y)\, e^{ihz}.$$

Введем вектор Герца $\vec{\mathfrak{P}}(x, y, z)$, удовлетворяющий уравнению

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}} = -(\varepsilon - 1)\vec{\mathfrak{E}}.$$

Поля выражаются через него по формулам

$$\vec{\mathfrak{E}} = (\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2)\vec{\mathfrak{P}}, \quad \vec{\mathfrak{H}} = -ik \operatorname{rot}\vec{\mathfrak{P}}. \tag{2}$$

Для полей, зависимость которых от z дается множителем e^{ihz}, будет, как легко проверить,

$$\vec{\mathfrak{P}}(x, y, z) = e^{ihz}\frac{\pi i}{2}\int \varkappa \vec{E}(\xi, \eta)\, H_0^{(1)}(\nu r)\, dS \ *, \quad \varkappa = \frac{\varepsilon - 1}{2\pi}. \tag{3}$$

Здесь интеграл берется по всему поперечному сечению стержня, $dS = d\xi d\eta$, $H_0^{(1)}$ есть функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, $\nu^2 = k^2 - h^2$ и знак ν выбирается таким образом, чтобы поток энергии, идущей к цилиндру, был равен нулю, т. е. $\operatorname{Im}\nu > 0$, и, при $\operatorname{Im}\nu = 0$, $\operatorname{Re}\nu > 0$.

Применив (2), (3) к внутренним точкам цилиндра, получим интегро-дифференциальное уравнение для $\vec{E}$:

$$\vec{E}(x, y) = \frac{\pi i}{2} e^{-ihz}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2)\, e^{ihz}\int \varkappa \vec{E}(\xi, \eta)\, H_0^{(1)}(\nu r)\, dS. \tag{4}$$

Рассмотрим условия, имеющие место при $|\nu d| \ll 1$. Тогда, ограничиваясь для $r \sim d$ первым членом разложения функции Ханкеля:

$$H_0^{(1)}(\nu r) = \frac{-2i}{\pi}\ln\frac{1}{r} + \frac{2i}{\pi}\ln\frac{\gamma\nu}{2i} + o(\nu^2 d^2 \ln \nu d), \quad \gamma = 1{,}78\ldots \tag{5}$$

получим, после элементарных вычислений:

$$\begin{gathered} E_x - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int \varkappa E_x \ln\frac{1}{r}\, dS + \frac{\partial}{\partial y}\int \varkappa E_y \ln\frac{1}{r}\, dS\right\} + \\ + k^2 \ln\frac{\gamma\nu}{2i}\int \varkappa E_x dS = k^2 L_x(E_x, E_y) + o(\nu^2 d^2 \ln \nu d), \\ E_y - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int \varkappa E_x \ln\frac{1}{r}\, dS + \frac{\partial}{\partial y}\int \varkappa E_y \ln\frac{1}{r}\, dS\right\} + \\ + k^2 \ln\frac{\gamma\nu}{2i}\int \varkappa E_y dS = k^2 L_y(E_x, E_y) + o(\nu^2 d^2 \ln \nu d), \end{gathered} \tag{6}$$

где L_x и L_y есть:

$$L_x(E_x, E_y) = \int \varkappa E_x \ln\frac{1}{r} dS - \frac{\partial}{\partial x}\int \varkappa \ln\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\int \varkappa E_x \ln\frac{1}{r} dS + \frac{\partial}{\partial \eta}\int \varkappa E_y \ln\frac{1}{r} dS\right] dS,$$

$$L_y(E_x, E_y) = \int \varkappa E_y \ln\frac{1}{r}\, dS - \frac{\partial}{\partial y}\int \varkappa \ln\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\int \varkappa E_x \ln\frac{1}{r}\, dS + \frac{\partial}{\partial \eta}\int \varkappa E_y \ln\frac{1}{r} dS\right] dS.$$

* Зависимость от времени есть $e^{-i\omega t}$.

Из (6) следует, между прочим, что для критических частот, для которых $h = k$, $\nu = 0$, должны быть выполнены условия:

$$\int \varkappa E_x dS = 0, \quad \int \varkappa E_y dS = 0.$$

Систему однородных уравнений (6) будем решать методом последовательных приближений, разлагая E_x и E_y, согласно виду правой части (6), по степеням k^2 *

$$E_x = E_{0x} + k^2 E_{1x} + \ldots, \quad E_y = E_{0y} + k^2 E_{1y} + \ldots \tag{7}$$

и рассматривая величину $k^2 \ln \frac{\gamma\nu}{2i}$ как собственное значение этой системы:

$$k^2 \ln \frac{\gamma\nu}{2i} = m_0 + k^2 m_1 + \ldots \tag{8}$$

При этом предположим, что

$$|\nu| \ll k, \tag{9}$$

и будем отбрасывать невыписанные члены порядка $\nu^2 d^2 \ln \nu d$. Это предположение окажется оправданным тем, что для величины $m_0 + m_1 k^2$ получится конечное значение, т. е. что $-i\nu d$ будет порядка $e^{-1/k^2 d^2}$, что при малых kd может иметь место только при выполнении неравенства (9).

Подставляя (7), (8) в (6) и разделяя порядки, получим:

$$E_{0x} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int \varkappa E_{0x} \ln \frac{1}{r}\, dS + \frac{\partial}{\partial y}\int \varkappa E_{0y} \ln \frac{1}{r}\, dS\right\} + m_0 \int \varkappa E_{0x} dS = 0,$$

$$E_{0y} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int \varkappa E_{0x} \ln \frac{1}{r}\, dS + \frac{\partial}{\partial y}\int \varkappa E_{0y} \ln \frac{1}{r}\, dS\right\} + m_0 \int \varkappa E_{0y} dS = 0. \tag{10}$$

$$\begin{gathered} E_{1x} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int \varkappa E_{1x} \ln \frac{1}{r}\, dS + \frac{\partial}{\partial y}\int \varkappa E_{1y} \ln \frac{1}{r}\, dS\right\} + \\ + m_0 \int \varkappa E_{1x} dS = - m_1 \int \varkappa E_{0x} dS + L_x(E_{0x}, E_{0y}), \\ E_{1y} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int \varkappa E_{1x} \ln \frac{1}{r}\, dS + \frac{\partial}{\partial y}\int \varkappa E_{1y} \ln \frac{1}{r}\, dS\right\} + \\ + m_0 \int \varkappa E_{1y} dS = - m_1 \int \varkappa E_{0y} dS + L_y(E_{0x}, E_{0y}). \end{gathered} \tag{11}$$

Уравнение (10) определяет во всей плоскости вектор $\vec{E}_0(E_{0x}, E_{0y}, 0)$, удовлетворяющий условиям: $\frac{\partial}{\partial y} E_{0x} - \frac{\partial}{\partial x} E_{0y} = 0$, $\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon E_{0x} + \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon E_{0y} = 0$ и на бесконечности стремящийся к постоянному вектору

$$\vec{C} = - m_0 \int \varkappa \vec{E}_0 dS. \tag{12}$$

Следовательно, вблизи цилиндра, на расстояниях, для которых справедливо (6), $\vec{E}_0$ совпадает с полем, которое получается, если цилиндр поместить в постоянное однородное поле $\vec{C}$. При этом направление $\vec{C}$ должно быть таково, чтобы вектор $\int \varkappa \vec{E}' dS$, где $\vec{E}'$ есть решение соответствующей электростатической задачи, был параллелен $\vec{C}$. Легко показать, что для любого вида функции $\varepsilon(x, y)$, удовлетворяющей условию (1), существуют два взаимно перпендикулярных напра-

* Фактически параметром малости служит величина $k^2 \int \varkappa dS$ (ср. уравнение (13)).

вдения, для которых это имеет место. Таким образом, E_0 (вблизи стержня) и m_0 могут быть найдены из электростатической задачи.

Для стержня, сечение которого есть кольцо с радиусами ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$), внутри которого ε постоянно,

$$m_0 = -\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2} + \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}.$$

Для цилиндра эллиптического сечения $m_0 = -\frac{1}{ab}\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{2(a+\varepsilon b)}{a+b}$, если $\vec{C}$ направлено вдоль большей оси сечения a, и $m_0 = -\frac{1}{ab}\frac{1}{\varepsilon-1} \times \frac{2(b+\varepsilon a)}{a+b}$, если $\vec{C}$ направлено вдоль меньшей оси b.

Легко показать, что в (9) и (10) слева стоит самосопряженный оператор, и обычным в теории возмущения способом, написав условие ортогональности решения системы (10) к правой части системы (11), можно найти явное выражение m_1 через $\vec{E}_0$:

$$m_1\left\{\left[\int \varkappa E_{0x} dS\right]^2 + \left[\int \varkappa E_{0y} dS\right]^2\right\} = \\ = \int \varkappa \left\{E_{0x} L_x (E_{0,x}, E_{0y}) + E_{0y} L_y (E_{0x}, E_{0y})\right\} dS. \tag{13}$$

Для кругового цилиндра радиуса ρ (13) дает $m_1 = -\ln\rho + \frac{1}{8}(\varepsilon+1)$, так что с точностью до членов порядка $k^2\rho^2$ дисперсионное уравнение при низких частотах есть

$$\rho^2 k^2 \ln\frac{\gamma\nu\rho}{2i} = -\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} + \rho^2 k^2 \frac{\varepsilon+1}{8}.$$

Из (2), (3) и (5) можно найти также первые члены разложения остальных компонент полей вблизи цилиндра по степеням k:

$$E_z = ik\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int \varkappa E_{0x}\ln\frac{1}{r}\,dS + \frac{\partial}{\partial y}\int \varkappa E_{0y}\ln\frac{1}{r}\,dS\right\},$$

$$H_z = ik\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int \varkappa E_{0x}\ln\frac{1}{r}\,dS - \frac{\partial}{\partial x}\int \varkappa E_{0y}\ln\frac{1}{r}\,dS\right\},$$

$$H_x = m_0\int \varkappa E_{0y} dS, \quad H_y = -m_0\int \varkappa E_{0x} dS.$$

Последняя формула показывает, что в нулевом приближении $\vec{H}$ есть постоянный вектор, перпендикулярный вектору $\vec{C}$ и равный ему по величине.

Таким образом, при весьма широких предположениях доказано, что вдоль бесконечного диэлектрического стержня при низких частотах могут распространяться две различным образом поляризованные волны. Скорости их в общем случае различны и, согласно (9), близки к c. Можно показать, что этот результат справедлив также и в том случае, если как ε, так и μ (магнитная проницаемость) стержня больше единицы.

Поступило
26 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Hondros, Ann. d. Phys., 30, 905 (1909). [2] D. Hondros u. P. Debye, Ann. d. Phys., 32, 465 (1910). [3] П. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, 1937. [4] S. Schelkunoff, Electromagnetic Waves, 1944.