Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИТАН

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 VI 1947)

1. Рассмотрим совокупность всех непрерывных (комплексных) функций, определенных в интервале $(-1, 1)$. В дальнейшем под сходимостью функциональных рядов мы будем подразумевать равномерную сходимость.

Пусть $\omega_0(x)$, $\omega_1(x), \ldots$ — счетное множество непрерывных функций, определенных в интервале $(-1, 1)$ и удовлетворяющих следующим двум условиям:

I. Линейная независимость, т. е. из тождества $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \alpha_p \omega_p(x) \equiv 0$ (α_p — константы) следует

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = 0.$$

II. Для любых целых $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$ имеют место тождества

$$\omega_p(x)\,\omega_q(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{pqr}\,\omega_r(x), \qquad \omega_p(x)\,\overline{\omega_q(x)} = \sum_{r=0}^{\infty} c^*_{pqr}\,\omega_r(x).$$

Черта над $\omega_q(x)$ означает комплексную сопряженность; c_{pqr} и c^*_{pqr} — комплексные числа.

Совокупности непрерывных функций, удовлетворяющих этим двум условиям, мы называем **базисами** из непрерывных функций.

С алгебраической точки зрения функции $\{\omega_p(x)\}_{p=0}^{\infty}$ суть единицы бесконечной, коммутативной гиперкомплексной системы. Пусть x_0, x_1, $x_2, \ldots$ — некоторая бесконечная последовательность комплексных чисел и пусть при каждых фиксированных p и q ряд $\sum\limits_{r=0}^{\infty} c_{pqr}\,x_r$ сходится абсолютно. Если $\{\omega_p(x)\}_{p=0}^{\infty}$ образуют полную ортогональную систему функций (в интервале $(-1, 1)$), то операторы T^p, определенные из равенства

$$T_q^p\,x_q = \sum_{r=0}^{\infty} c_{pqr}\,x_r,$$

суть операторы обобщенного сдвига, рассматривавшиеся нами ранее в [1].

Укажем несколько простейших примеров базисов:

а) $\omega_p(x) = x^p$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, $\omega_p(x)\,\omega_q(x) = \omega_{p+q}(x)$, т. е. $c_{pqr} = 1$, если $r = p + q$, и $c_{pqr} = 0$ в других случаях.

b) $\omega_p(x)=e^{2\pi i p x}$ $(p=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, $\omega_p(x)\,\omega_q(x)=\omega_{p+q}(x)$, $\omega_p(x)\overline{\omega_q(x)}=$ $=\omega_{p-q}(x)$, т. е. $c_{pqr}=1$, если $r=p+q$, и $c_{pqr}=0$ в других случаях; $c^*_{pqr}=1$, если $r=p-q$, и $c^*_{pqr}=0$ в других случаях.

c) $\omega_p(x)=\cos p \arccos x$ $(p=0,1,2,\ldots)$, $\omega_p(x)\,\omega_q(x)={}^1/_2[\omega_{p+q}(x)+$ $+\omega_{|p-q|}(x)]$, т. е. $c_{pqr}={}^1/_2$, если $r=p+q$ или $r=|p-q|$, и $c_{pqr}=0$ в других случаях.

2. Пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ — другой базис из непрерывных функций, „равносильный“ исходному в том смысле, что для любых целых, положительных p и i имеем

$$\omega_p(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{pi}\varphi_i(x),\qquad \varphi_i(x)=\sum_{q=0}^{\infty}\beta_{iq}\,\omega_q(x).$$

Пусть $\varphi_i(x)\,\varphi_j(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{ijk}\,\varphi_k(x),\qquad \varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a^*_{ijk}\,\varphi_k(x).$

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\alpha_{pi}|<\alpha,\qquad \sum_{q=0}^{\infty}|\beta_{iq}|<\beta,\quad |a_{ijk}|<A,\quad |a^*_{ijk}|<A^*, \tag{1}$$

где α, β, A, A^* — константы. При этих предположениях легко получить следующие тождества

$$c_{pqr}=\sum_{i,\,j,\,k=0}^{\infty}\alpha_{pi}\,\alpha_{qj}\,\beta_{kr}\,a_{ijk}, \tag{2}$$

$$c^*_{pqr}=\sum_{i,\,j,\,k=0}^{\infty}\alpha_{pi}\,\overline{\alpha_{qj}}\,\beta_{kr}\,a^*_{ijk}. \tag{2'}$$

3. Определение 1. Последовательность чисел x_r $(r=0,\ 1,2,\ldots)$ называется положительно определенной относительно кубической матрицы c^*_{pqr}, если для любого целого положительного числа N и любых комплексных чисел $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_N$ выполняется неравенство

$$\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\xi_p\overline{\xi}_q\sum_{r=0}^{\infty}c^*_{pqr}\,x_r\geqslant 0.$$

Пользуясь тождеством (2′), легко получить следующую лемму.

Лемма 1. *Если последовательность x_r положительно определена относительно кубической матрицы c^*_{pqr}, то последовательность*

$$y_k=\sum_{r=0}^{\infty}\beta_{kr}\,x_r$$

положительно определена относительно кубической матрицы a^*_{ijk}.

Следствие. Допустим, что из положительной определенности последовательности y_k следует интегральное представление

$$y_k=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(x)\,d\sigma(x),$$

где $\sigma(x)$ — ограниченная, монотонно возрастающая функция и $\varphi_k(x)$ продолжены из интервала $(-1,1)$ в интервал $(-\infty,\infty)$. Тогда для последовательности x_r получается представление:

$$x_r = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{rk}\, y_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{rk}\, \varphi_k(x)\right) d\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_r(x)\, d\sigma(x).$$

Это следствие позволяет получать интегральные представления для последовательностей, положительно определенных относительно одних кубических матриц, из уже известных интегральных представлений положительно определенных последовательностей относительно других кубических матриц.

Пусть, например, $\omega_p(x) = \cos p \arccos x$, $\varphi_i(x) = x^i$. В этом случае не все условия (1) удается проверить, однако здесь все ряды обрываются, и поэтому преобразования, с помощью которых получается тождество (2), законны. Таким образом, в силу леммы 1, преобразованная последовательность y_k будет обладать тем свойством, что для любых действительных чисел $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N$ (N — произвольное натуральное число) выполняется неравенство

$$\sum_{i,\,j=0}^{N} y_{i+j}\, \eta_i\, \eta_j \geqslant 0.$$

Но из проблемы моментов Hamburger'а следует, что в этом случае последовательность y_k представима в виде

$$y_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, d\sigma(x),$$

где $\sigma(x)$ — ограниченная, монотонно возрастающая функция. Отсюда для x_r получаем представление

$$x_r = \int_{-\infty}^{\infty} \cos r \arccos x\, d\sigma(x). \tag{3}$$

В частности, если $\sup\limits_r |x_r| < \infty$, то

$$x_r = \int_{-1}^{1} \cos r \arccos x\, d\sigma(x).$$

Другой пример мы получим, взяв в качестве $\omega_p(x)$ полную систему нормированных решений уравнения Штурма — Луивилля

$$u'' - q(x)\, u + \lambda^2 u = 0 \tag{4}$$

при граничных условиях

$$u'(0) = u'(\pi) = 0 \tag{5}$$

и $\varphi_i(x) = \cos ix$. Тогда

$$c_{pqr} = \int_0^{\pi} \omega_p(x)\, \omega_q(x)\, \omega_r(x)\, dx, \qquad a_{ijk} = \begin{cases} 1/2, & \text{если } k = i + j \text{ или } k = |i - j|, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

В этом случае положительно определенная последовательность x_r (относительно кубической матрицы c_{pqr}) предполагается ограниченной, и выполнимость условия (1) показана в ([1]).

4. Тождество (2) полезно также при изучении обобщенных почти периодических последовательностей. Мы будем предполагать, что при каждых фиксированных p и q

$$\sum_{r=0}^{\infty} |c_{pqr}| < \infty.$$

Определение 2. Ограниченная последовательность чисел x_r ($\sup\limits_r |x_r| < \infty$) называется почти периодической относительно кубической матрицы c_{pqr}, если семейство последовательностей $A_{pq} = \sum\limits_{r=0}^{\infty} c_{pqr} x_r$ (p — параметр) компактно в смысле равномерной сходимости для всех q ($q=0, 1,2, \ldots$).

Лемма 2. *Пусть* $\sum\limits_{p=0}^{\infty} |\beta_{pl}| < b$ (*b — константа*), $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{ijk}| < \infty$. *В этом случае из почти периодичности последовательности* $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ *относительно кубической матрицы* c_{pqr} *следует почти периодичность последовательности*

$$y_k = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{kr} x_r$$

относительно кубической матрицы a_{ijk}.

В частности, пусть $\{\omega_p(x)\}_{p=0}^{\infty}$ — полная система нормированных решений уравнения Штурма — Луивилля (4) с граничными условиями (5) и $\varphi_i(x) = \cos ix$. В этом случае лемма 2 применима, и мы получаем компактность семейства последовательностей

$$\tfrac{1}{2}(y_{i+j} + y_{|i-j|}) \quad (j \text{— параметр}).$$

Из этой последней компактности следует почти периодичность последовательности y_k (в смысле Бора).

Доказательство этого факта (при некоторых ограничениях) имеется в [1]. Полное доказательство будет опубликовано в подробной работе.

Используя почти периодичность (в смысле Бора) преобразованной последовательности y_k, можно доказать для исходной последовательности x_r следующую теорему апроксимации (см. также [1]):

Пусть x_r — *почти периодическая последовательность относительно кубической матрицы*

$$c_{pqr} = \int_0^{\pi} \omega_p(x)\, \omega_q(x)\, \omega_r(x)\, dx,$$

где $\{\omega_p(x)\}_{p=0}^{\infty}$ — *полная система нормированных решений уравнения (4) с граничными условиями (5). Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно построить конечную сумму*

$$\sigma_r = \sum_{q=0}^{M} \rho_q^{(M)} a_q\, \omega_r(\alpha_q), \text{ где } 0 \leqslant \alpha_q \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \rho_q^{(M)} \leqslant 1,$$

$$\lim_{M\to\infty} \rho_q^{(M)} = 1 \ (q \text{— фиксировано}); \quad a_q = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N} x_r\, \omega_r(\alpha_q),$$ *удовлетворяющую неравенству*

$$|x_r - \sigma_r| < \varepsilon \quad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

Поступило
3 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Левитан, Математ. сб., **17**, № 1, 9 (1945).