Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. И. КОРЕНБЛЮМ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ КЛАССА L^p СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ТОЧКАХ ЛЕБЕГА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 26 V 1947)

Задача нахождения необходимых и достаточных условий для представимости функций различных классов сингулярными интегралами в точках Лебега полностью решена лишь для двух классов функций: для класса существенно ограниченных функций L^∞ — Лебегом в 1909 г. ([1]) и для класса суммируемых функций L^1 — Д. К. Фаддеевым в 1936 г. ([2]).

В настоящей заметке дается полное решение этой задачи для классов L^p $(1 < p < \infty)$ функций, суммируемых с p-й степенью.

1°. Пусть $\varphi(t)$ — измеримая функция, заданная на конечном интервале $\tau = (c, d)$. Введем в рассмотрение неотрицательное число μ, однозначно определяемое неравенствами

$$\int\limits_{\overset{d}{\underset{c}{E}}[|\varphi(t)| \geqslant \mu]} |\varphi(t)|^q\, dt \geqslant \mu \operatorname{mes} \tau \geqslant \int\limits_{\overset{d}{\underset{c}{E}}[|\varphi(t)| > \mu]} |\varphi(t)|^q\, dt. \tag{1}$$

Легко видеть, что $\mu < +\infty$ тогда и только тогда, когда $\varphi(t) \in L^q(c, d)$. Число μ будем обозначать символом $\mu[\varphi(t), \tau, q]$.

Теорема 1. *Для того чтобы соотношение*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \varphi_n(x, t) f(t)\, dt, \tag{2}$$

где $\varphi_n(x, t)$ — последовательность интегральных ядер, a (a, b) — некоторый конечный интервал, выполнялось в каждой точке Лебега x $(a < x < b)$ любой функции $f(t) \in L^p(a, b)$ $(1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

A) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n(x, t)\, dt = 1$ *при всяких* x, α, β $(a \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant b)$.

B) *При каждом фиксированном* $x \in (a, b)$ *выполняются неравенства*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\mu_{ni}^+ \operatorname{mes} \tau_i^+ + \mu_{ni}^- \operatorname{mes} \tau_i^-) \leqslant M(x) \text{ при } n \geqslant N(x), \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\tau_i^+ = \left(x + \frac{b-x}{2^i}, x + \frac{b-x}{2^{i-1}}\right), \quad \tau_i^- = \left(x - \frac{x-a}{2^{i-1}}, x - \frac{x-a}{2^i}\right), \\ &\mu_{ni}^+ = \mu[\varphi_n(x, t), \tau_i^+, q], \quad \mu_{ni}^- = \mu[\varphi_n(x, t), \tau_i^-, q], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Доказательство этой теоремы в существенном сводится к установлению следующих трех вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Для того чтобы интеграл* $\int\limits_0^1 \varphi(t) f(t)\,dt$ *существовал, какова бы ни была функция* $f(t)$ *из класса* $L^p(0,1)$ $(1<p<\infty)$, *имеющая при* $t=0$ *точку Лебега, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$s[\varphi(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\mu_i < \infty, \tag{5}$$

$$\mu_i = \mu[\varphi(t), \tau_i, q], \quad \tau_i = (2^{-i}, \overline{2^{-i-1}}), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Доказательство. Установим необходимость условия (5). Все величины μ_i следует считать конечными, так как $\varphi(t)$, очевидно, должна быть суммируемой с q-й степенью на каждом интервале τ_i. Пользуясь (1), нетрудно построить множества E_i $(i=1, 2, \ldots)$:

$$E[t \in \tau_i; |\varphi(t)| \geqslant \mu_i] \supseteq E_i \supseteq E[t \in \tau_i; |\varphi(t)| > \mu_i], \tag{6}$$

для которых

$$\int\limits_{E_i} |\varphi(t)|^q\,dt = \mu_i \operatorname{mes} \tau_i. \tag{7}$$

Пусть условие (5) не выполнено. В этом случае можно указать такую последовательность положительных чисел (3) $\lambda_i \to 0$, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i 2^{-i}\mu_i = \infty, \text{ но } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{1+\varepsilon} 2^{-i}\mu_i < \infty \tag{8}$$

при всяком $\varepsilon > 0$.

Определим функцию $f(t)$ следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda_i |\varphi(t)|^{q-1} \operatorname{sgn} \varphi(t) \text{ при } t \in E_i \quad (i=1,2,\ldots), \\ 0 \text{ при } t \overline{\in} \sum\limits_{i=0}^{\infty} E_i. \end{cases} \tag{9}$$

Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} 2^k \int\limits_0^{2^{-k}} |f(t)|\,dt = 0, \tag{10}$$

где k пробегает натуральные значения. Действительно, принимая во внимание (6), (7) и (9), находим:

$$\int\limits_0^{2^{-k}} |f(t)|\,dt = \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i \int\limits_{E_i} |\varphi(t)|^{q-1}\,dt \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \int\limits_{E_i} |\varphi(t)|^q\,dt =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{2^i} \leqslant \frac{\sup\{\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots\}}{2^k},$$

откуда непосредственно следует (10). Из (10) нетрудно вывести, что $f(t)$ имеет при $t=0$ точку Лебега. Далее, принимая во внимание (6), (7), (8) и (9), непосредственной проверкой убеждаемся, что построенная функция $f(t)$ принадлежит к классу $L^p(0,1)$ и $\int\limits_0^1 \varphi(t) f(t)\,dt = +\infty$.

Остается доказать достаточность условия (5). Предполагая его выполненным, пусть $f(t) \in L^p(0,1)$ и имеет точку Лебега при $t=0$. Легко видеть, что $\sup\limits_{0<h\leqslant 1} \frac{1}{h}\int\limits_0^h |f(t)|\,dt = M < \infty$.

Имеем:

$$\int\limits_{\tau_i} |f(t)|\,dt \leqslant \int\limits_0^{2^{-(i-1)}} |f(t)|\,dt \leqslant \frac{M}{2^{i-1}} \quad (i=1,2,\ldots). \tag{11}$$

Пользуясь (5), (6), (7) и (11), находим:

$$\int\limits_0^1 |\varphi(t) f(t)|\,dt = \int\limits_{\sum\limits_{i=1}^{\infty} E_i} |\varphi(t) f(t)|\,dt + \int\limits_{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\tau_i - E_i)} |\varphi(t) f(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \{s[\varphi(t)]\}^{1/q}\left[\int\limits_0^1 |f(t)|^p\,dt\right]^{1/p} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \int\limits_{\tau_i} |f(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \{s[\varphi(t)]\}^{1/q}\left[\int\limits_0^1 |f(t)|^p\,dt\right]^{1/p} + 2Ms[\varphi(t)] < \infty. \tag{12}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если последовательность функций $\varphi_n(t)$, заданных на $(0,1)$, такова, что для любой функции $f(t)\in L^p(0,1)$ $(1<p<\infty)$, имеющей при $t=0$ точку Лебега, произведение $\varphi_n(t)f(t)$ суммируемо, начиная с некоторого n, то найдется такое N, не зависящее от функции $f(t)$, что произведение $\varphi_n(t)f(t)$ суммируемо при $n\geqslant N$ для всех функций $f(t)\in L^p(0,1)$, имеющих при $t=0$ точку Лебега.*

Лемма 3. *Для того чтобы выполнялось соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \varphi_n(t) f(t)\,dt = 0, \tag{13}$$

какова бы ни была функция $f(t)$ класса $L^p(0,1)$, имеющая при $t=0$ точку Лебега при значении $f(0)=0$, необходимо и достаточно выполнение условий:

α) $\int\limits_\alpha^\beta \varphi_n(t)\,dt \to 0$ *при всяких* α, β $(0<\alpha<\beta\leqslant 1)$;

β) $s[\varphi_n(t)] \leqslant M$ *при* $n \geqslant N$, *где* M *и* N — *некоторые положительные константы.*

Доказательства леммы 2, а также необходимости условий леммы 3 по идее близки к аналогичным леммам Д. К. Фаддеева для класса L^1. Достаточность условий леммы 3 устанавливается с помощью оценки, аналогичной (12).

2°. Условие B) теоремы 1 можно заменить эквивалентной формулировкой, вводя понятие „обобщенной монотонной мажоранты“.

Теорема 2. *Для того чтобы соотношение* (2) *имело место в каждой точке Лебега x $(a<x<b)$ любой функции $f(t)\in L^p(a,b)$, необходимо и достаточно выполнение условия* A) *теоремы* 1 *и следующего условия:*

B') *Существуют неотрицательные функции $\psi_n(x,t)$ — назовем их „обобщенными монотонными мажорантами“ ядра $\varphi_n(x,t)$ — такие, что при каждом фиксированном $x\in(a,b)$*

a) $\int\limits_{\mathfrak{M}_n} |\varphi_n(x,t)|^q\, dt \leqslant \int\limits_a^b \psi_n(x,t)\, dt,$

где $\mathfrak{M}_n = \underset{a}{\overset{b}{E}}\ [|\varphi_n(x,t)| > \psi_n(x,t)]\ (n=1, 2, \ldots);$

b) $\psi_n(x,t') \leqslant \psi_n(x,t'')$ *при* $t' < t'' < x$; $\psi_n(x,t') \geqslant \psi_n(x,t'')$ *при* $x < t' < t''$;

c) $\int\limits_a^b \psi_n(x,t)\, dt \leqslant M(x)$ *при* $n \geqslant N(x)$.

Эквивалентность условий B) и B') легко устанавливается с помощью следующей простой леммы.

Лемма 4. *Для того чтобы существовала суммируемая „невозрастающая мажоранта“ $\psi(t)$ функции $\varphi(t)$, определенной на* $(0,1)$:

$$\psi(t) \geqslant |\varphi(t)| \text{ почти везде на } (0,1), \tag{14}$$

$$\psi(t') \geqslant \psi(t'') \text{ при } 0 < t' < t'' \leqslant 1,\ \int\limits_0^1 \psi(t)\, dt < \infty,$$

необходимо и достаточно выполнение условия:

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} m_i < \infty, \text{ где } m_i = \underset{t \in \tau_i}{\text{vrai max}}\ \{|\varphi(t)|\},\quad \tau_i = (2^{-i},\ 2^{-\overline{i-1}}). \tag{15}$$

При выполнении этого условия мажоранта $\psi(t)$ может быть выбрана так, что $\int\limits_0^1 \psi(t)\, dt \leqslant 2s$.

Лемма 4 доказывается с помощью рассмотрения функции $\psi(t)$ вида:

$$\psi(t) = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_i\} \text{ при } t \in (2^{-i}, 2^{-\overline{i-1}}]\quad (i=1, 2, \ldots).$$

3°. Теоремы 1 и 2 обобщаются на некоторые более общие классы ([4, 5]) суммируемых функций $f(t)$.

4°. В заключение заметим следующее. Теоремы 1 и 2 относятся к представлению функции $f(t)$ в точках Лебега, т. е. по сути в точках x, в которых

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b S_n(t-x)\, |f(t) - f(x)|\, dt = 0, \tag{16}$$

где $S_n(t-x)$ — ядро Стеклова: $S_n(u) = n$ при $u \in \left(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)$, $S_n(u) = 0$ при других действительных значениях u. Это дает повод к постановке следующей задачи: найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы соотношение (2) выполнялось для любой функции $f(t)$ из класса L^p (или некоторого более общего класса — ср. 3°) в каждой точке x $(a < x < b)$, в которой имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b \theta_n(x,t)\, |f(t) - f(x)|\, dt = 0, \tag{17}$$

где $\theta_n(x,t)$ — некоторое заданное положительное сингулярное ядро.

Поступило
26 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Lebesgue, Ann. de Toulouse, s. 3, 1 (1909). [2] Д. К. Фаддеев, Мат. сб., нов. серия, 1, в. 3 (1936). [3] E. W. Hobson, Theory of Functions of a Real Var., 2, 1926, p. 14. [4] H. Young, Proc. Roy. Soc. (A), 87 (1912). [5] Z. W. Birnbaum u. W. Orlicz, Studia Math., 3 (1931).