Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. С. ШАПИРО

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 9 VI 1947)

Для решения задачи воспользуемся методом функций напряжений Г. Галеркина [1] в видоизменении, предложенном П. Ф. Папковичем [2].

Выражения для напряжений через гармонические функции напряжений П. Ф. Папковича имеют вид [3]

$$\tau_{ik}=\delta_k^i\sigma\nabla^2\Psi+\frac{1}{H_iH_k}\left\{2(1-\sigma)\left[\frac{\partial(\Phi_{q_i}H_i')}{\partial q_k}+\frac{\partial(\Phi_{q_k}H_k')}{\partial q_i}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2\Psi}{\partial q_i\partial q_k}-\left[4(1-\sigma)\Phi q_\lambda H_\lambda-\frac{\partial\Psi}{\partial q_\lambda}\right]\Gamma_{ik}^\lambda\right\}, \qquad (1)$$

где $\Psi=\Phi_0+x\Phi_1+y\Phi_2+z\Phi_3$, $H_i^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2$,

$$\Phi_{qi}=\frac{1}{H_i}\left(\Phi_3\frac{\partial x}{\partial q_i}+\Phi_2\frac{\partial y}{\partial q_i}+\Phi_1\frac{\partial z}{\partial q_i}\right), \qquad \delta_k^i=\begin{cases}1 \text{ при } i=k,\\ 0 \text{ при } i\neq k,\end{cases}$$

$$\Gamma_{ik}^\lambda=0 \text{ при } i\neq k\neq\lambda, \quad \Gamma_{i\lambda}^\lambda=\frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial H_\lambda}{\partial q_i}, \quad \Gamma_{kk}^\lambda=-\frac{H_k}{H_\lambda^2}\frac{\partial H_k}{\partial q_\lambda}.$$

В случае задач с осевой симметрией можно положить $\Phi_2=\Phi_3=0$ (за ось вращения принимается ось z).

Введем эллиптические координаты

$$z=rt, \quad x=[(1+r^2)(1-t^2)]^{1/2}\cos\gamma, \quad y=[(1+r^2)(1-t^2)]^{1/2}\sin\gamma. \qquad (2)$$

Поверхности $r=\text{const}$ образуют семейство сжатых софокусных эллипсоидов вращения.

Рассмотрим задачу о равновесии внешности эллипсоида вращения. На поверхности эллипсоида напряжения σ_r и τ_{rt} будем считать представленными в виде рядов

$$\sigma_r=\sum_{n=0}^{\infty}p_nP_n(t), \quad \tau_{rt}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n'P_{n+1}^1(t), \qquad (3)$$

где коэффициенты p_n и p_n' предполагаются заданными.

Гармонические функции Φ_0 и Φ_1 принимаем равными*

$$\Phi_0=\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(t)S_n(r), \quad \Phi_1=\sum_{n=-1}^{\infty}C_nP_{n+1}(t)S_n(r), \quad S_n(r)=i^{-n}Q(ir). \qquad (4)$$

---

* Принимая $\Phi_0=\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(t)P_n(ir)$, $\Phi_1=\sum_{n=-1}^{\infty}C_nP_{n+1}(t)P_{n+1}(ir)$, получим решение для внутренности эллипсоида вращения.

В эллиптической системе координат для σ_r и τ_{rt}, в соответствии с (1), имеем

$$\sigma_r = -\frac{1}{r^2+t^2}\left[(r^2+1)\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right] + \\ + \frac{1}{(r^2+t^2)^2}\left[r(r^2+1)\frac{\partial\Psi}{\partial r} - t(1-t^2)\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right] + \\ + \sigma\nabla^2\Psi + \frac{4(1-\sigma)}{r^2+t^2}(r^2+1)t\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}, \tag{5}$$

$$\frac{\tau_{rt}}{\sqrt{(r^2+1)(1-t^2)}} = \frac{1}{r^2+t^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial t} - \frac{1}{(r^2+t^2)^2}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial t} + t\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) - \\ - \frac{2(1-\sigma)}{r^2+t^2}\left(t\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - r\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right). \tag{6}$$

Умножая обе части выражений для напряжений σ_r и τ_{rt}, даваемых формулами (5) и (6), на $(r^2+t^2)^2$ и учитывая разложения (3), имеем

$$(r^2+t^2)^2\sum_{n=0}^{\infty} p_n P_n = \sum_{n=-1}^{\infty}\{-(r^2+t^2)[(r^2+1)A_n P_n S_n'' + \\ + C_n\{-2(1-\sigma)t(r^2+1)P_{n+1}S_{n+1}' + rt(r^2+1)P_{n+1}S_{n+1}'' - \\ - 2\sigma r(1-t^2)P_{n+1}'S_{n+1}\}] + (1-t^2)[A_n(rP_{n+1}S_{n+1}' - tS_nP_n') + \\ + C_n(rP_{n+1}S_{n+1}' - tS_{n+1}P_{n+1}')rt]\}, \tag{7}$$

$$\frac{(r^2+t^2)^2}{[(1-t^2)(1+r^2)]^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty} p_n' P_n' = \sum_{n=-1}^{\infty}\{(r^2+t^2)[A_n S_{n+1}' P_{n+1}' + \\ + C_n\{S_{n+1}P_{n+1} + tP_{n+1}'S_{n+1} + rP_{n+1}S_{n+1}' - \\ - 2(1-\sigma)(tP_{n+1}'S_{n+1} - rP_{n+1}S_{n+1}')\}] - A_n(rP_nS_n' - tP_{n+1}S_{n+1}') - \\ - C_n[r^2(P_{n+1}S_{n+1} + tP_{n+1}'S_{n+1}) + t^2(P_{n+1}S_{n+1} + rP_{n+1}S_{n+1}')]\}. \tag{8}$$

Пользуясь известными формулами для полиномов Лежандра ([4])

$$(t^2-1)P_n' = n(tP_n - P_{n-1}), \quad P_n^1 = (1-t^2)^{1/2}\frac{dP_n}{dt},$$

$$t^n = \frac{n!}{3\cdot5\ldots(2n+1)}\left\{(2n+1)P_n + (2n-3)\frac{2n+1}{2}P_{n-2} + \right. \\ \left. + (2n-7)\frac{(2n+1)(2n-1)}{2\cdot4}P_{n-4} + \ldots\right\},$$

а также разложением Ф. Неймана

$$P_nP_m = \sum_{k=0}^{m}\frac{a_{m-k}a_ka_{n-k}}{a_{n+m-k}}\left(\frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1}\right)P_{n+m-2k}, \quad a_m = \frac{(2m)!}{m!m!2^m},$$

или

$$P_nP_m = \sum_{k=0}^{m}\alpha_k^{m,n}P_{n+m-2k}, \quad \alpha_k^{m,n} = 0 \text{ при } m<k \text{ или } n<k,$$

можно из граничных условий (7), (8) получить систему уравнений для определения искомых величин A_n и C_n, сравнивая коэффициенты при полиномах Лежандра с одинаковым индексом.

Таким путем находим:

$$A_{l-2}a_{l-2}^{1}+A_{l}a_{l}^{2}+A_{l+2}a_{l+2}^{3}+C_{l-4}c_{l-4}^{1}+C_{l-2}c_{l-2}^{2}+C_{l}c_{l}^{3}+C_{l+2}c_{l+2}^{4}=$$
$$=p_{l-4}q_{l-4}^{1}+p_{l-2}q_{l-2}^{2}+p_{l}q_{l}^{3}+p_{l+2}q_{l+2}^{4}+p_{l+4}q_{l+4}^{5}; \tag{9}$$

$$A_{l-3}a_{l-3}^{4}+A_{l-1}a_{l-1}^{5}+A_{l+1}a_{l+1}^{6}+A_{l+3}a_{l+3}^{7}+C_{l-5}c_{l-5}^{5}+$$
$$+C_{l-3}c_{l-3}^{6}+C_{l-1}c_{l-1}^{7}+C_{l+1}c_{l+1}^{8}+C_{l+3}c_{l+3}^{9}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}[p'_{l-5}s_{l-5}^{1}+p'_{l-3}s_{l-3}^{2}+p'_{l-1}s_{l-1}^{3}+p'_{l+1}s_{l+1}^{4}+$$
$$+p'_{l+3}s_{l+3}^{5}+p'_{l+5}s_{l+5}^{6}]. \tag{10}$$

Здесь обозначено:

$$q_{l-4}^{1}=\frac{8}{35}\alpha_0^{l-4,\,4},\quad q_{l-2}^{2}=\frac{4}{21}(7r^2+3)\alpha_0^{l-2,\,2}+\frac{8}{35}\alpha_1^{l-2,\,4}$$

и т. д.

В качестве примера рассмотрим задачу о всестороннем растяжении внешности эллипсоида вращения.

Предварительно решим задачу для внешности эллипсоида, когда к его поверхности приложены только постоянные сжимающие напряжения $-p$. Интересующее нас решение получим, налагая на полученное напряженное состояние всесторонние растягивающие напряжения p.

Легко убедиться, что уравнения (9) и (10) для всех A_l и C_l с нечетными индексами перейдут в систему однородных уравнений. Точно так же, придавая l значения $l>5$, придем к однородной системе уравнений для A_l при $l>2$ и C_l при $l>0$.

Эти системы уравнений будут удовлетворены при значениях

$$\begin{aligned} &A_{2k+1}=C_{2k-1}=0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots),\\ &A_{2k}=C_{2k-2}=0 \quad (k=2,\ 3,\ 4,\ldots). \end{aligned} \tag{11}$$

Для определения не равных нулю коэффициентов A_0, A_2 и C_0 из (9) находим, полагая последовательно $l=0$, $l=2$ и $l=4$:

$$\begin{aligned} A_0a_0^2+A_2a_2^3+C_0c_0^3&=p_0q_0^3,\\ A_0a_0^1+A_2a_2^2+C_0c_0^2&=p_0q_0^2,\\ A_2a_2^1+C_0c_0^1&=p_0q_0^1. \end{aligned} \tag{12}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что решение уравнений (12) тождественно удовлетворяет также уравнениям (10).

Окончательные выражения для напряжений σ_t и σ_γ на поверхности эллипсоида при $t=0$ имеют вид:

$$\sigma_t=\frac{p\xi}{2N}[2(1+\sigma)c^2\xi-c(2\sigma\xi+2\sigma+7\xi)+1+4\xi+2\sigma], \tag{13}$$

$$\sigma_\gamma=\frac{p}{2N}\{\xi[2(1+\sigma)\ c^2\xi-c\{\xi+6+4\sigma(2\xi-1)\}+$$
$$+4\sigma\xi+3]+2(1-\sigma)\}. \tag{14}$$

Здесь

$$N = -(1+\sigma) c^2 \xi^2 + c[\xi^2 - 2(1-\sigma)\xi] + \xi + 1 - \sigma,$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\xi - 1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\xi - 1} \quad \text{при } \xi > 1,$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\xi - 1}} \left[\ln(1 + \sqrt{1-\xi}) - \frac{1}{2} \ln \xi \right] \quad \text{при } \xi < 1,$$

причем, согласно рис. 1, $\xi = \frac{d}{\rho}$, $d = \sqrt{1+r^2}$.

Результаты вычислений приведены в табл. 1 и представлены на рис. 2.

Таблица 1

ξ	σ_t/p	σ_γ/p	ξ	σ_t/p	σ_γ/p
0	0	2,000	10	3,965	1,729
0,5	1,266	1,598	15	4,843	1,928
0,8	1,418	1,547	20	5,588	2,111
1,2	1,675	1,541	25	6,250	2,278
1,5	1,719	1,464	30	6,852	2,441
2	1,915	1,452	35	7,399	2,588
3	2,265	1,461	40	7,916	2,729
5	2,848	1,524			

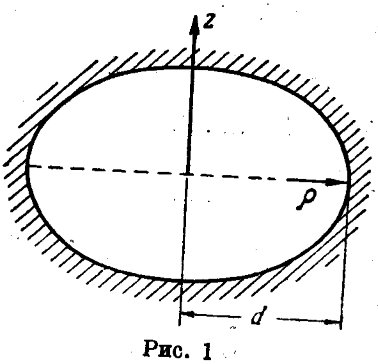

Рис. 1

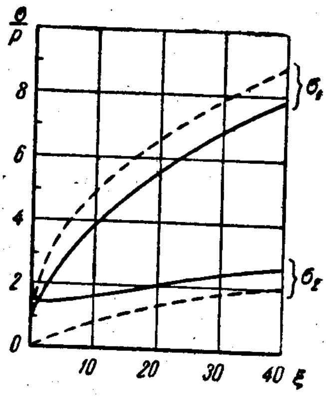

Рис. 2

На рис. 2 $\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_2 = \sigma_r$. Пунктиром нанесены кривые Г. Нейбера ([5]) для одностороннего растяжения внешности эллипсоида в направлении оси вращения.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
9 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Г. Галеркин, ДАН, сер. А, стр. 355 (1930). [2] П. Ф. Папкович, Теория упругости, 1939. [3] Г. С. Шапиро, ДАН, 55, № 8 (1947). [4] И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, 1943. [5] H. Neuber, Kerbspannungslehre, 1937.