Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. З. НАРОДЕЦКИЙ

НАПРЯЖЕНИЯХ В НЕОДНОРОДНОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 25 VI 1947)

§ 1. Плоская задача теории упругости для изотропных и неодно-одных сред произвольного вида рассматривалась С. Г. Михлиным [1] Д. И. Шерманом [2, 3]. Используя существенно различные ме-оды, авторы сводят ее к интегральному уравнению Фредгольма.

В настоящей статье мы рассматриваем случай, имеющий важное рактическое значение, когда изотропная и неоднородная среда полняет в плоскости $z=x+iy$ круг S, который состоит из двух днородных сред: концентрического кольца S_1 и круга S_0 (внутрен-его к S). Окружности, ограничивающие области S и S_0, назовем, оответственно, L_2 и L_1, а их радиусы — R_2 и R_1; обход каждой из кружностей L_j ($j=1$, 2) условимся считать происходящим против вижения часовой стрелки.

Предположим, что заданы внешние силы, действующие на контуре L_2. Кроме того, будем считать, что векторы напряжения и смещения зменяются непрерывно при переходе из среды S_1 в S_0.

Как известно, [4, 5], задача об определении напряжений и дефор-аций при этих условиях сводится к отысканию функций $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$, регулярных, соответственно, в областях S_0 и S_1, удов-летворяющих предельным равенствам:

$$\varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}=f_1(t) \text{ на } L_2, \tag{1,1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=\varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}+C,\\ &\frac{1}{\mu_0}\left(\varkappa_0\varphi_0(t)-t\overline{\varphi_0'(t)}-\overline{\psi_0(t)}\right)=\frac{1}{\mu_1}\left(\varkappa_1\varphi_1(t)-t\overline{\varphi_1'(t)}-\overline{\psi_1(t)}\right) \text{ на } L_1. \end{aligned}\right\} \tag{1,2}$$

Здесь t—аффикс точки на L_j ($j=1$, 2); функция

$$f_1(t)=i\int_{S_0}^{S_1}(X_n+iY_n)\,ds, \tag{1,3}$$

где X_n и Y_n — компоненты действующих внешних сил; $\varkappa_j$, μ_j — упругие постоянные для области S_j ($j=0, 1$). Далее, C — постоянная, которую можно фиксировать произвольно; мы ее примем равной нулю.

§ 2. Решение указанной задачи можно найти обычным путем, отыскивая $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ в виде рядов Тейлора и Лорана и определяя коэффициенты из граничных условий (1,1) и (1,2). Однако такое решение мало удобно, так как оно, вообще говоря, приводит к медленно сходящимся рядам, в особенности для нагрузок специального характера и при близких к единице значениях отношений радиусов. Мы имеем в виду преимущественно именно эти случаи, представляющие наибольший практический интерес (к ним следует, например, отнести случай действующих сосредоточенных сил).

Предлагаемый нами прием позволяет, при некоторых предположениях относительно упругих постоянных, сравнительно легко получить достаточно эффективное решение для интересующих нас случаев.

Введем на L_1 функцию $g(t)$, равную левой или (что то же) правой части первого из равенств (1, 2), тогда, учитывая также второе из равенств (1,2) легко получим:

$$A\varphi_1(t)-B\varphi_0(t)=g(t), \quad A=\frac{\mu_0(1+\varkappa_1)}{\mu_0-\mu_1}, \quad B=\frac{\mu_1(1+\varkappa_0)}{\mu_0-\mu_1}. \qquad (2,1)$$

Помножим уравнение (1,1) и сопряженное с ним на $\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z}$, где z—любая точка области S_0, и проинтегрируем каждое из них по L_2. После некоторых преобразований получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi_1(t)}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\left(z(1-c^2)\overline{\varphi_1'(t)}-\varphi_1(t)+g(t)\right)\frac{dt}{t-c^2z}=A_1(z), \quad (2,2)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{\varphi_1(t)}}{t-c^2z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\left(\frac{1-c^2}{c^2}\,\bar t\,\varphi_1'(t)-\overline{\varphi_1(t)}+\overline{g(t)}\right)\frac{dt}{t-z}=B_1(z), \quad (2,3)$$

где положено:

$$A_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{f_1(t)}{t-z}\,dt, \quad B_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\overline{f_1(t)}}{t-z}\,dt, \qquad c=\frac{R_1}{R_2}<1.$$

Подставив выражение для $\varphi_1(t)$ через $\varphi_0(t)$ и $g(t)$ из (2,1) в (2,2) и (2,3) и учитывая известные соотношения ([5])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g(t)}{t-z}\,dt=\varphi_0(z)+a_1^{(0)}z, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{g(t)}}{t-z}\,dt=\psi_0(z)+\frac{R_1^2}{z}\left(\varphi_0'(z)-a_1^{(0)}\right),$$

$$a_1^{(0)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi_0'(t)}{t}\,dt,$$

получим

$$(1-\lambda)\varphi_0(z)=A(z)-\lambda\varphi_0(c^2z)-\lambda_1(1-c^2)z^3\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi_0'(c^2z)}{z}+\frac{1}{R_2^2}\psi_0(c^2z)\right), \quad (2,4)$$

$$(1-\lambda)(1-c^2)\frac{R_2^2}{z^2}\varphi_0'(z)=B(z)-(1+\lambda_1)\left(\psi_0(z)+\frac{R_1^2}{z}\varphi_0'(z)\right)+$$
$$+\lambda_1\left(\psi_0(c^2z)+\frac{R_2^2}{z}\varphi_0'(c^2z)\right), \quad (2,5)$$

где введены обозначения:

$$A(z)=A_1(z)-\frac{A_1'(0)}{2}z, \qquad B(z)=B_1(z)+\frac{A_1'(0)}{2}\frac{R_2^2}{z},$$

$$\lambda=\frac{\varkappa_1\mu_0-\varkappa_0\mu_1}{\mu_0(1+\varkappa_1)}, \qquad \lambda_1=\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0(1+\varkappa_1)}.$$

Введем теперь новую функцию $\Psi_0(z)$, определяемую равенством

$$\Psi_0(z)=\psi_0(z)+\frac{R_1^2}{z}\varphi_0'(z). \qquad (2,6)$$

При этом соотношения (2,4) и (2,5) запишутся в виде:

$$\varphi_0(z)=A(z)+\lambda(\varphi_0(z)-\varphi_0(c^2z))-\lambda_1\frac{c^2(1-c^2)z^3}{R_2^2}\Psi_0'(c^2z), \qquad (2,7)$$

$$\Psi_0(z) = B(z) - \lambda_1 (\Psi_0(z) - \Psi_0(c^2 z)) - (1-\lambda)(1-c^2)\frac{R_2^2}{z}\varphi_0'(z). \qquad (2,8)$$

Заменим в двух последних равенствах z на $c^{2k}z$, где k — любое ое положительное число, и, умножив затем первое из равенств $(-1)^k \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^k \frac{1}{\lambda}$, а второе — на $\frac{\lambda_1^k}{(1+\lambda_1)^{k+1}}$, просуммируем далее дое из них по всем значениям k, начиная от нуля. После простых образований будем иметь:

$$\varphi_0(z) = \omega(z) + az^3 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_0^k c^{6k} \Psi_0'(c^{2k}z), \qquad (2,9)$$

$$\Psi_0(z) = \eta(z) - \frac{b}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_0^k \varphi_0'(c^{2k}z), \qquad (2,10)$$

введены обозначения:

$$\omega(z) = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{k=}^{\infty} \lambda_0^k A(c^{2k}z), \qquad \eta(z) = \frac{1}{1+\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_0^k B(c^{2k}z),$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{1-c^2}{c^2 R_1^2}, \quad b = \frac{(1-\lambda)(1-c^2)}{1+\lambda_1} R_2^2, \quad \lambda_0 = -\frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \varepsilon\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}.$$

Выражения (2,9) и (2,10) содержат в качестве параметра постоян- о λ_0. Функции $\varphi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ будем искать в форме рядов, распо- женных по степеням этого параметра *:

$$\varphi_0(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_0^p \varphi_{0p}(z), \quad \Psi_0(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_0^p \Psi_{0p}(z). \qquad (2,11)$$

Из (2,9) и (2,10) исключим $\Psi_0'(c^{2k}z)$ и $\varphi_0'(c^{2k}z)$, в полученных новых венствах заменим функции $\varphi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ их выражениями из (2,11). сле этого получим:

$$\lambda_0^p \varphi_{0p}(z) = \alpha(z) - abz^3 \frac{d}{dz} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_0^{p+n} c^{2(2k-n)} \varepsilon^{n-k} \frac{\varphi_{0p}'(c^{2n}z)}{z}, \qquad (2,12)$$

$$\lambda_0^p \Psi_{0p}(z) = \chi(z) - \frac{ab}{z} \frac{d}{dz} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_0^{p+n} c^{2(2k+n)} \varepsilon^{n-k} z^3 \Psi_{0p}'(c^{2n}z), \qquad (2,13)$$

е

$$(z) = \omega(z) + az^3 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_0^k c^{6k} \eta'(c^{2k}z), \quad \chi(z) = \eta(z) - \frac{b}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^k \frac{\varepsilon^k}{c^{2k}} \omega'(c^{2k}z).$$

Приравнивая в обеих частях формул (2,12) и (2,13) коэффициенты ри одинаковых степенях λ_0 и считая при этом в выражениях для (z) и $\chi(z)$ значение λ_0 фиксированным, получим для $\varphi_{0p}(z)$ и $\Psi_{0p}(z)$ ледующие рекуррентные соотношения:

$$\varphi_{00}(z) = \alpha(z), \quad \varphi_{01}(z) = -abc^2 z^3 \left(\frac{\varphi_{00}'(c^2 z)}{z}\right)',$$

$$\varphi_{02}(z) = -abc^2 z^3 \left(\frac{\varphi_{01}'(c^2 z)}{z}\right)' + (1 + \varepsilon c^{-4}) \varphi_{01}(c^2 z),$$

* Этот метод был предложен проф. Д. И. Шерманом.

$$\varphi_{0p}(z)=-abc^2z^3\left(\frac{\varphi_{0,\,p-1}(c^2z)}{z}\right)'+(1+\varepsilon c^{-4})\,\varphi_{0,\,p-1}(c^2z)-\varepsilon c^{-4}\varphi_{0,\,p-2}(c^2z), \tag{2,14}$$

$$\Psi_{00}(z)=\chi(z),\quad \Psi_{01}(z)=-\frac{abc^6}{z}\left(z^3\Psi'_{00}(c^2z)\right)',$$

$$\Psi_{02}(z)=-\frac{abc^6}{z}\left(z^3\Psi'_{01}(c^2z)\right)'+(\varepsilon+c^4)\,\Psi_{01}(c^2z),$$

$$\Psi_{0p}(z)=-\frac{abc^6}{z}\left(z^3\Psi'_{0,p-1}(c^2z)\right)'+(\varepsilon+c^4)\,\Psi_{0,\,p-1}(c^2z)-\varepsilon c^4\Psi_{0,\,p-2}(c^4z), \tag{2,15}$$

$$p=3,4,\ldots$$

Из этих формул очевидно, что все $\varphi_{0p}(z)$ и $\Psi_{0p}(z)$ могут быть последовательно определены.

Нами были вычислены нормальные и касательные напряжения $\widehat{\rho\rho}_0$ и $\widehat{\rho\vartheta}_0$ на L_1 в предположении, что в точках $z=\pm R_2$ контура L_2 приложены две сжимающие сосредоточенные силы P. При этом, считая $\mu_0/\mu_1=0{,}75$, $\varkappa_0=\varkappa_1=2{,}0$ (что соответствует $\lambda_0=0{,}16$) и $c=0{,}9$, мы ограничились лишь первыми приближениями для каждой из функций * $\varphi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ (содержащими λ_0 в первой степени). Кроме того, были подсчитаны компоненты $\widehat{\rho\rho}_1$ и $\widehat{\rho\vartheta}_1$ на окружности L_1 при той же нагрузке, когда область S — однородная. Напряжения $\widehat{\rho\rho}_j$ и $\widehat{\rho\vartheta}_j$ выражены в форме:

$$\widehat{\rho\rho}_j=l_j\frac{P}{\pi R_2},\quad \widehat{\rho\vartheta}_j=m_j\frac{P}{\pi R_2}\quad (j=0,\ 1).$$

Полученные значения l_j и m_j приведены в таблицах.

ϑ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
l_0	−18,8	−0,352	0,011	0,018	0,033	0,011	0,010
l_1	−20,0	−0,257	−0,008	0,017	0,024	0,012	0,011

ϑ	3°29′10″**	15°	30°	45°	60°	75°	90°
m_0	6,252	1,098	0,164	0,056	0,024	0,008	0,000
m_1	6,861	1,020	0,158	0,048	0,019	0,007	0,000

Как видно из этих таблиц, разница в модулях сдвига μ_0 и μ_1 в 25% при $c=0{,}9$ лишь незначительно меняет величины $\widehat{\rho\rho}_{max}$ и $\widehat{\rho\vartheta}_{max}$. С уменьшением μ_0/μ_1 и c отношения $\widehat{\rho\rho}_{0\,max}/\widehat{\rho\rho}_{1\,max}$ и $\widehat{\rho\vartheta}_{0\,max}/\widehat{\rho\vartheta}_{1\,max}$ также будут уменьшаться. При близких к единице μ_0/μ_1 и c практически можно считать, что распределение напряжений в неоднородном цилиндре будет таким же, как и в однородном.

В заключение отметим, что, благодаря наличию в формулах (2,14) и (2,15) коэффициента ab, пропорционального $(1-c^2)^2$, ряды для искомых функций достаточно быстро сходятся при близких к единице и малых значениях величины c.

Поступило
25 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, Тр. Сейсмологическ. ин-та АН СССР, № 66 (1935). [2] Д. И. Шерман, Тр. Сейсмологическ. ин-та АН СССР, № 86 (1938). [3] Д. И. Шерман, Прикладн. математ. и мех., 7 (1943). [4] Г. В. Колосов, Применение комплексной переменной к теории упругости, 1935. [5] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, 1935.

---

* В выражениях для $\alpha(z)$ и $\chi(z)$ были удержаны лишь члены, не зависящие от λ_0 и содержащие λ_0 в первой степени.

** Угол 3°29′10″ соответствует max $\widehat{\rho\vartheta}_1$.