Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII. № 7

ГИДРОМЕХАНИКА

Н. Н. КАБАЧИНСКИЙ

ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРОФИЛЯ ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ДВИЖЕНИИ КОРАБЛЯ

(Представлено академиком В. Л. Поздюниным 20 VI 1947)

Исходным положением работы является использование права на-гать одну на другую волны, вызываемые отдельными элементами ематизированного по J. H. Michell'ю (1) корабля. Чтобы облегчить ычисление профиля, достаточно раз и навсегда составить таблицы ункций влияния, зависящих лишь от координат. Наиболее удобной казалась та форма потенциала скоростей, которая получается непо-едственно при определении его по методу Л. Н. Сретенского (2). ля наших целей потребовалось внести видоизменения в некоторых талях.

Плоскость координат XOZ совмещаем с диаметральной, XOY — невозмущенной поверхностью потока, набегающего на корабль со коростью c, противоположной положительному направлению оси OX. сь OZ направляем вверх. Выделяем на диаметральной плоскости рямоугольник со сторонами, параллельными осям и равными $d\xi$ и $d\zeta$. бсолютную величину его погружения обозначаем ζ. Совокупность вух участков поверхности корабля, проектирующихся на этот прямо-гольник, и будет тем волнообразующим элементом, профиль волны оторого требуется вычислить.

В потенциале скоростей $\Phi(x, y, z)$ выделяем $\varphi(x, y, z)$ — потенциал озмущений:

$$\Phi(x, y, z) = cx + \varphi(x, y, z). \tag{1}$$

В свою очередь, φ разделяем на два слагаемые: ψ — потенциал озмущения, соответствующего предельному случаю бесконечно боль-шой силы тяготения, и ω — дополнение к ψ до φ при конечном g. раничное условие для потенциала возмущения φ:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=0} = -\frac{1}{g}\left[c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \mu c^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_{z=0}, \tag{2}$$

где μ — коэффициент диссипативных сил Rayleigh, в случае $g \to \infty$ переходит в граничное условие для ψ:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z=0} = 0. \tag{3}$$

Следовательно, при наличии в потоке особенности для построения ψ надо добавить отражение этой особенности в плоскости XOY.

В нашем случае:

$$\psi=\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\zeta)^2}}\right]d^2e, \tag{4}$$

где $d^2e=\frac{c}{2\pi}\tau d\xi\, d\zeta$ — величина, пропорциональная обильности эквивалентного волнообразующему элементу источника, причем $\tau=\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}$; здесь $y=\pm f(x,z)$ — уравнение поверхности корабля.

Пользуясь известными из теории функций Бесселя зависимостями, получаем:

$$\left[-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{z=0}=\frac{d^2e}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\int\limits_{-}^{\pi}(k^2\cos^2\theta+i\mu k\cos\theta)e^{k(-\zeta+ix\cos\theta+iy\sin\theta)}\,d\theta.$$

Отыскивая $\omega(x, y, z)$ в форме:

$$\omega(x,y,z)=\frac{d^2e}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\int\limits_{-\pi}^{\pi}A(k,\theta)\,e^{k[(z-\zeta)+ix\cos\theta+iy\sin\theta]}\,d\theta,$$

используя условие (2) и обозначая $h=c^2/g$, получаем:

$$A(k,\theta)=-1+\frac{1/h}{-k\cos^2\theta-\mu i\cos\theta+1/h}.$$

Ограничиваем задачу определением профиля при $y=0$. Вводя новые переменные: $\alpha=k\cos\theta$, $\gamma=k$, получаем при $\mu\to 0$ в пределе:

$$\omega=\frac{4d^2e}{\pi}\left[-\int\limits_0^\infty e^{-\zeta\gamma}d\gamma\int\limits_0^\gamma\frac{\cos x\alpha}{\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}d\alpha+\frac{1}{h}\int\limits_0^\infty e^{-\zeta\gamma}\gamma d\gamma\int\limits_0^\gamma\frac{\cos x\alpha}{\left(\frac{\gamma}{h}-\alpha^2\right)\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}d\alpha-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{2}\int\limits_{1/h}^\infty e^{-\zeta\gamma}\frac{\sin x\sqrt{\gamma/h}}{\sqrt{h\gamma-1}}d\gamma\right]. \tag{5}$$

В последующем пользуемся относительными размерами: $d\xi_1=d\xi/h$, $d\zeta_1=d\zeta/h$, ..., опуская индекс 1 для сокращения письма. Целесообразно рассматривать возвышение $d\eta_{\omega\zeta}$, вызываемое источником той же плотности по полоске шириной $d\xi$, начинающейся на глубине ζ_0 и простирающейся бесконечно вниз:

$$\frac{d\eta_{\omega\zeta}}{\tau d\xi}=\frac{2}{\pi^2}(-L+N+\pi M), \tag{6}$$

где

$$L=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\zeta_0\gamma}}{\gamma}d\gamma\int\limits_0^\gamma\frac{\alpha\sin x\alpha}{\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}d\alpha, \tag{7}$$

$$N=\int\limits_0^\infty e^{-\zeta_0\gamma}d\gamma\int\limits_0^\gamma\frac{\alpha\sin x\alpha}{(\gamma^2-\alpha^2)\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}\quad\alpha, \tag{8}$$

$$M=\int\limits_1^\infty e^{-\zeta_0\gamma}\frac{\cos x\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}d\gamma. \tag{9}$$

В выражении $d\eta_{\omega\zeta}$ не учтено влияние ψ. Для возвышения $d\eta_{\psi\zeta}$, …тветствующего влиянию ψ, имеем:

$$\frac{d\eta_{\psi\zeta}}{\tau d\xi}=\frac{2}{\pi^2}\,\frac{\pi}{2x}\left(1-\frac{\zeta_0}{\sqrt{x^2+\zeta_0^2}}\right). \tag{10}$$

Для приложений наиболее существенна функция M. При $\zeta_0=0$ она …опорциональна функции Неймана первого порядка:

$$M\,(0,\,x)=-\frac{\pi}{2}\,N_0(x). \tag{11}$$

Используя соотношение $\partial M/\partial\zeta_0=\partial^2 M/\partial x^2$ и разлагая $M(\zeta_0,x)$ по …епеням ζ_0 при $\zeta_0=0$, получаем выражение для вычисления M при …статочно малых ζ_0 и больших x:

$$\begin{aligned}M(\zeta_0,x)=-\frac{\pi}{2}\Bigg\{&N_0(x)\Bigg[e^{-\zeta_0}+\frac{\zeta_0^2}{x^2}\left(-\frac{3}{2!}+\frac{9}{3!}\zeta_0-\frac{18}{4!}\zeta_0^2+\frac{30}{5!}\zeta_3^0-\frac{45}{6!}\zeta_0^4+\ldots\right)+\\&+\frac{\zeta_0^3}{x^4}\left(-\frac{60}{3!}+\frac{345}{4!}\zeta_0-\frac{1025}{5!}\zeta_0^2+\frac{2775}{6!}\zeta_0^3-\ldots\right)+\\&+\frac{\zeta_0^4}{x^6}\left(-\frac{2520}{4!}+\frac{23940}{5!}\zeta_0-\ldots\right)\Bigg]+\\&+\frac{\zeta_0}{x}N_1(x)\Bigg[e^{-\zeta_0}+\frac{\zeta_0}{x^2}\left(\frac{6}{2!}-\frac{33}{3!}\zeta_0+\frac{96}{4!}\zeta_0^2-\frac{210}{5!}\zeta_0^3+\frac{390}{6!}\zeta_0^4-\ldots\right)+\\&+\frac{\zeta_0^2}{x^4}\left(\frac{120}{3!}-\frac{1320}{4!}\zeta_0+\frac{6345}{5!}\zeta_0^2-\ldots\right)\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Таблица 1

Значения функции M

k \ ζ_0	0	0,25	0,5	1	2
0		0,976	0,601	0,279	0,077
1	0,160	0,416	0,317	0,162	0,063
2	−0,642	−0,373	−0,196	−0,064	−0,011
3	−0,810	−0,620	−0,455	−0,228	−0,055
4	−0,516	−0,434	−0,353	−0,220	−0,069
5	−0,024	−0,051	−0,064	−0,064	−0,025
6	0,396	0,291	0,227	0,105	0,023
7	0,533	0,416	0,341	0,188	0,061
8	0,361	0,292	0,248	0,149	0,047
9	0,008	0,019	0,025	0,028	0,020
10	−0,309	−0,232	−0,185	−0,097	−0,023
11	−0,425	−0,330	−0,271	−0,154	−0,048
12	−0,293	−0,234	−0,197	−0,118	−0,027
13	−0,009	−0,013	−0,018	−0,017	−0,014
15	0,364	0,282	0,220	0,134	0,046
17	0,010	0,015	0,017	0,013	0,008
19	−0,325	−0,250	−0,195	−0,118	−0,044

Пользуясь методом установившейся фазы Кельвина, а также иными путями, легко непосредственно получить для больших x приближенную формулу:

$$M = e^{-\zeta_0} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \tag{13}$$

Чтобы дать представление о характере функции M, в табл. 1 приведены ее значения, вычисленные нами.

Функция L при $x \to \infty$ стремится к нулю довольно быстро и притом монотонно. Иной характер имеет функция N. Делая замену переменного $\gamma = \alpha + \beta$, получаем при $x \to \pm\infty$ в пределе:

$$N = \mp \pi M. \tag{14}$$

При $x \to -\infty$ имеем в пределе для полного возвышения $d\eta_\zeta$, обусловливаемого совместным влиянием ω и ψ:

$$\frac{d\eta_\zeta}{\tau\, d\xi} = \frac{4}{\pi} M. \tag{15}$$

Для характеристики функций L и N в табл. 2 приведены вычисленные нами значения этих функций для некоторых частных случаев.

Таблица 2

Значения функций L и N

x		$\pi/4$	$\pi/2$	π
$\zeta_0=0$	L	2,05	1,07	0,61
	N	0,74	3,01	2,16
$\zeta_0=0,5$	L	0,72	0,74	0,46
	N	0,10	1,48	1,54

Если целью вычислений является определение положения поперечных волн, то вполне достаточна приближенная зависимость (15). Сопоставления вычисленных таким образом профилей с фотографированными дали удовлетворительное в качественном отношении совпадение.

Поступило
20 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. H. Michell, Phil. Mag., 45, 5, 106 (1898). [2] Л. Н. Сретенский, Труды ЦАГИ, в. 319 (1937).