Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

Т. А. ШУЛЬМАН

ОБ ИЗГИБАНИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 2 VII 1947)

В $n+1$-мерном аффинном пространстве рассмотрим гиперповерхность. С текущей ее точкой M свяжем репер, состоящий из $n+1$ линейно независимых векторов $\vec{e}_1 \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n+1}$, исходящих из точки M. Расположим первые n векторов в касательной гиперплоскости к гиперповерхности. Уравнения инфинитезимального перемещения такого репера имеют вид:

$$\vec{dM} = \omega^i \vec{e}_i, \qquad \omega^{n+1} = 0,$$

$$\vec{de}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^{n+1} \vec{e}_{n+1}, \quad \vec{de}_{n+1} = \omega_{n+1}^i \vec{e}_i + \omega_{n+1}^{n+1} \vec{e}_{n+1}, \qquad i,\ j = 1,\ 2, \dots, n,$$

где ω^i, $\omega_i^j, \dots$ — линейные однородные формы относительно дифференциалов параметров изменения репера. Они подчинены структурным уравнениям:

$$D\omega^i = [\omega^j \omega_j^i] + [\omega^{n+1} \omega_{n+1}^i],$$

$$D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j] + [\omega_i^{n+1} \omega_{n+1}^j] \dots$$

Выберем вектор $\vec{e}_{n+1}$, не лежащий в касательной гиперплоскости, следующим образом:

1⁰. Зададим в каждой касательной гиперплоскости n линейно независимых векторов. Назовем объемом, построенным на каких-либо n векторах, определитель из компонент этих векторов по заданным. Этим вводится в каждом касательном пространстве своя объемная метрика.

2⁰. Потребуем, чтобы при проектировании бесконечно близкого касательного пространства на данное параллельно $\vec{e}_{n+1}$ объем в соседнем пространстве был бы равен объему его образа в исходном пространстве.

Эти два требования накладывают условие на вектор $\vec{e}_{n+1}$. Следовательно, накладывается также условие на связность, устанавливаемую с помощью проектирования параллельно $\vec{e}_{n+1}$ (1). Это условие может быть записано в виде:

$$[\omega^{n+1} \omega_{n+1}^i] = 0. \qquad 1)$$

Назовем вектор $\vec{e}_{n+1}$, удовлетворяющий этому требованию, эквиаффинной нормалью. (В частности, эквиаффинной нормалью является существующая на каждой гиперповерхности аффинная нормаль [2]).

Назовем пару гиперповерхностей наложимой, если можно установить между ними такое точечное соответствие, при котором совпадает хотя бы одна связность, установленная эквиаффинной нормалью.

Поставим задачу об отыскании таких пар гиперповерхностей вместе с их системами отнесения. Если формы, относящиеся к одной гиперповерхности, обозначить через ω^i, $\omega_i^j, \ldots$, а соответственно формы, относящиеся к другой, через Ω^i, $\Omega_i^j, \ldots$, то условия наложимости принимают вид:

$$\omega^i = \Omega^i, \quad \omega_i^j = \Omega_i^j, \quad \omega^{n+1} = 0, \quad \Omega^{n+1} = 0,$$

$$[\omega_i^{n+1} \omega_{n+1}^i] = 0. \tag{2}$$

Уравнение (1) для второй гиперповерхности выполняется как следствие системы (2). Присоединяя внешние производные уравнений (2), получим систему, которой должна удовлетворять пара наложимых гиперповерхностей, отнесенных к эквиаффинным нормалям.

$$\omega^i = \Omega^i, \quad \omega_i^j = \Omega_i^j, \quad \omega^{n+1} = 0, \quad \Omega^{n+1} = 0, \quad [\omega_i^{n+1} \omega_{n+1}^i] = 0, \tag{2'}$$

$$[\omega^k \omega_k^{n+1}] = 0, \quad [\omega^k \Omega_k^{n+1}] = 0, \tag{3}$$

$$[\omega_i^{n+1} \omega_{n+1}^j] = [\Omega_i^{n+1} \Omega_{n+1}^j]. \tag{4}$$

Очевидно, что если $\omega_{n+1}^i = 0$ и $\Omega_{n+1}^i = 0$, то система (2'), (3) и (4) находится в инволюции и произвол ее решения — две функции n аргументов. В этом случае на гиперповерхностях устанавливается аффинная геометрия (нормали параллельны).

Исключая этот тривиальный случай, будем считать, например, $\omega_{n+1}^1 \neq 0$ и, соответственно, $\Omega_{n+1}^1 \neq 0$. Тогда, рассматривая уравнения (4), получим:

I°. Среди ω_i^{n+1} и Ω_i^{n+1} имеется не более двух линейно независимых форм. При $n > 2$ это соответствует случаю развертывающихся гиперповерхностей. Исключая этот случай и случай $n=2$, получим:

II°. $\omega_{n+1}^k = \rho^k \Omega_{n+1}^k$.

Легко показать, применяя лемму Картана к уравнениям (4), что все ρ^k равны между собой. Тогда с помощью нормировки вектора $\vec{e}_{n+1}$ на одной из гиперповерхностей можно добиться, чтобы

$$\omega_{n+1}^i = \Omega_{n+1}^i. \tag{5}$$

Внося соотношения (5) в уравнения (4) для $j=1$ и раскрывая последние по лемме Картана, получим:

$$\omega_i^{n+1} - \Omega_i^{n+1} = \lambda_i \omega_{n+1}. \tag{6}$$

Тогда уравнения (4) для $j=2, 3, \ldots, n$ примут вид:

$$\lambda_i [\omega_{n+1}^1 \Omega_{n+1}^j] = 0.$$

Если все $\lambda_i = 0$, то $\omega_i^{n+1} = \Omega_i^{n+1}$, и в этом случае наложение сводится тождественному. В противном случае имеем

$$\omega_{n+1}^{j}=\mu^{j}\omega_{n+1}^{1}, \quad j=1,2,\ldots,n; \quad \mu^{1}=1. \tag{7}$$

Внесем теперь соотношения (6) в уравнения (3), тогда получим:

$$\lambda_{i}[\omega^{i}\omega_{n+1}^{1}]=0.$$

Дифференцируя уравнение (5) внешним образом, получим:

$$[\omega_{n+1}^{n+1}-\Omega_{n+1}^{n+1}, \ \omega_{n+1}^{1}]=0.$$

Раскрываем это уравнение по лемме Картана:

$$\omega_{n+1}^{n+1}-\Omega_{n+1}^{n+1}=\nu\omega_{n+1}^{1}. \tag{8}$$

Дифференцируя равенства (6), (7) и (8) внешним образом и присоединяя полученные уравнения к системе, получим систему дифференциальных уравнений пары наложимых гиперповерхностей в виде:

$$\begin{gathered}
\omega^{i}=\Omega^{i}, \quad \omega_{i}^{j}=\Omega_{i}^{j}, \quad \omega^{n}=0, \quad \Omega^{n}=0, \quad \omega_{i}^{n+1}-\Omega_{i}^{n+1}=\lambda_{i}\omega_{n+1}^{1}, \\
\omega_{n+1}^{j}=\mu^{j}\omega_{n+1}^{1}, \quad \omega_{n+1}^{i}=\Omega_{n+1}^{i}, \quad \omega_{n+1}^{n+1}-\Omega_{n+1}^{n+1}=\nu\omega_{n+1}^{1}, \\
[\omega^{i}\omega_{i}^{n+1}]=0, \quad \mu^{j}[\omega_{j}^{n+1}\omega_{n+1}^{1}]=0, \\
\lambda_{i}[\omega^{i}\omega_{n+1}^{1}]=0, \quad [d\ln\nu-\mu^{j}\omega_{j}^{1}+\omega_{n+1}^{n+1}, \ \omega_{n+1}^{1}]=0, \\
[d\mu^{j}-\mu^{j}\mu^{k}\omega_{k}^{1}+\mu^{k}\omega_{k}^{j}, \quad \omega_{n+1}^{1}]=0, \\
[d\lambda_{i}-\lambda_{i}\mu^{j}\omega_{j}^{1}+\lambda_{i}(\Omega_{n+1}^{\hat{n}+1}+\omega_{n+1}^{n+1})-\lambda_{j}\omega_{i}^{j}-\nu\omega_{i}^{n+1}, \omega_{n+1}^{1}]=0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Система (9) находится в инволюции, и произвол ее решения — одна функция n аргументов.

Итак, общий результат можно сформулировать следующим образом: если исключить случай аффинной геометрии на гиперповерхности и случай развертывающихся гиперповерхностей (степень развертывания не более двух), то для $n>2$ в общем случае гиперповерхности не наложимы; исключение представляет рассмотренный класс изгибаемых пар гиперповерхностей, зависящий вместе с их системами отнесения от одной функции n аргументов.

Поступило
3 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ф. Лаптев, ДАН, 41, № 8 (1943). Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, II.