Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

С. А. ЧУНИХИН

О ПОДГРУППАХ ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 18 VI 1947)

§ 1. В предыдущей статье (1) нами были введены понятия относительной разрешимости и относительной сильной разрешимости групп. Напомним их.

Определение 1. Если каждый индекс композиционного ряда конечной группы или не делится на данное простое число p или равен p, то группа называется разрешимой относительно числа p или p-разрешимой.

Определение 2. Если каждый индекс главного ряда конечной группы или не делится на данное простое число p или равен p, то группа называется сильно разрешимой относительно числа p или сильно p-разрешимой.

Там же была указана теорема, аналогичная в известной мере теореме Ф. Голла (2) относительно подгрупп обычных разрешимых групп. В настоящей работе эти исследования продолжены.

Среди полученных результатов содержатся теоремы, обобщающие теоремы Ф. Голла (теоремы 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 и 3.14 работы (2)) о классических разрешимых и сильно разрешимых группах.

§ 2. Теорема 1. *Число различных простых чисел, относительно которых неразрешимая группа неразрешима, всегда больше двух.*

Доказательство. Допустим, что таких простых чисел не больше двух. Тогда, учитывая определение p-разрешимости, видим, что фактор-группы композиционного ряда группы должны быть циклическими простого порядка, или группами, в порядок которых войдет не более двух различных простых чисел. Последнее, однако, невозможно, так как все фактор-группы композиционного ряда должны быть простыми. Следовательно, все индексы композиционного ряда — простые числа. Получилось противоречие и теорема доказана.

При доказательстве мы опирались на результат Бернсайда (3) о непростоте групп порядков вида $p^\alpha q^\beta$, $p \neq q$, p и q — простые. Так как теорема Бернсайда была получена при помощи теории характеров, то это обстоятельство выделяет теорему 1 от остальных теорем предыдущей и настоящей статей.

Заметим, что утверждение, что *число различных простых чисел, относительно которых неразрешимая группа неразрешима, всегда больше* 1, доказывается аналогично, но уже без применения теории характеров.

Теорема 2. *Если m такой делитель порядка g группы $\mathfrak{G}$, что $(m, g/m)=1$, и если среди различных простых делителей m имеется не более одного простого числа, относительно которого $\mathfrak{G}$ неразрешима, то:*

1. *$\mathfrak{G}$ имеет подгруппы порядка m, причем все такие подгруппы сопряжены в $\mathfrak{G}$ и число их ρ является, следовательно, делителем g/m.*

2. *Всякая подгруппа порядка m_1, делящего m, из группы $\mathfrak{G}$, в случае, если m/m_1 не делится ни на какое простое число, относительно которого $\mathfrak{G}$ неразрешима, входит в одну из подгрупп порядка m.*

3. *Число ρ является таким делителем g/m, что наивысшая входящая в ρ степень каждого простого числа, относительно которого $\mathfrak{G}$ разрешима, есть делитель некоторого индекса главного ряда $\mathfrak{G}$ и сравнима с 1 по некоторому простому делителю числа m.*

Теорема 2 является обобщением теоремы Ф. Голла ([2]) об обычных разрешимых группах, а в объеме утверждения 1 — также и теоремы Силова. Возможность обращения теоремы 2 остается проблематичной.

§ 3. Теорема 3. *У всякой конечной группы $\mathfrak{G}$ существует такой главный ряд*

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{H}_1 \supset \mathfrak{H}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{H}_\mu = \mathfrak{F},$$

что в последовательности его индексов

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_1), (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2), (\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3), \ldots$$

подпоследовательность индексов, меньших всех тех простых чисел, относительно которых $\mathfrak{G}$ не является сильно разрешимой, или пуста, или не убывает и служит начальным куском.

Следствие. Если $\mathfrak{G}$ порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — простые числа, сильно разрешима относительно $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$, $i > 1$, то она имеет характеристические подгруппы порядков:

$$\prod_{j=2}^{j=k} p_j^{\alpha_j}, \quad \prod_{j=3}^{j=k} p_j^{\alpha_j}, \ldots, \quad \prod_{j=i}^{j=k} p_j^{\alpha_j}.$$

Теорема 3 обобщает теорему 3.14 Ф. Голла.

Поступило
18 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чунихин, ДАН, 55, № 6 (1946). [2] Ph. Hall, J. London Mathemat. Soc., 3, 98 (1928). [3] W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, sec. ed., 1911, p. 323.