Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

ДЖ. Х. КАРИМОВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 V 1947)

Рассматривается уравнение [1]

$$\frac{\partial Z}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu f\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \tag{1}$$

при условии

$$Z(0, t) = Z(\pi, t) = 0, \quad Z(x, t) = Z(x, t+1) \tag{2}$$

в области

$$\bar{D} = D\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{pmatrix},$$

для которого доказана при некоторых ограничениях, накладываемых на $\Phi(x, t)$ и $f\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$, теорема существования и единственности решения, причем предполагалось, что значение параметра μ сколь угодно мало, а именно

$$\mu < \frac{1}{2N(C_1 + C_2)L},$$

где

$$N = \sup\left|f'\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right|, \quad L = \sup|Z_1 - Z_2| + \sup\left|\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial Z_2}{\partial x}\right|,$$

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t\int_0^\pi e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi)}\sin n\pi\eta\, d\eta\, d\xi + \int_0^1\int_0^\pi \frac{e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi+1)}\sin n\pi\eta\, d\eta\, d\xi}{1 - e^{-a^2n^2\pi^2}}\right\}\sin n\pi x,$$

$$C_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\left\{\int_0^1\int_0^\pi e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi)}\sin n\pi\eta\, d\eta\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_0^1\int_0^\pi \frac{e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi+1)}\sin n\pi\eta\, d\eta\, d\xi}{1 - e^{-a^2n^2\pi^2}}\right\}\sin n\pi x.$$

В этой статье рассмотрено уравнение (1) при условиях (2) и получена теорема существования для больших конечных значений параметра μ.

Результат, полученный в настоящей работе, тот же, что и в предыдущей, а доказательство отлично и освобождено от указанного требования малости значения параметра μ, при этом использовывается теорема Арцела ([2]).

Пусть функция $\Phi(x, t)$ правой части дифференциального уравнения (1) удовлетворяет условию Липшица

$$|\Phi(x_1, t_1) - \Phi(x_2, t_2)| < M_1 |x_1 - x_2| + M_2 |t_1 - t_2|$$

для всех точек (x_1, t_1) и (x_2, t_2), принадлежащих области $\overline{D}$, и пусть ее частная производная $\partial\Phi / \partial x = \Phi_1(x, t)$ будет непрерывной функцией с ограниченной вариацией по x при любом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Далее предположим, что $\Phi(x, t)$ периодическая по t с периодом, равным единице:

$$\Phi(x, t) = \Phi(x, t + 1)$$

и разлагается в ряд Фурье по синусам

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \sin n\pi x,$$

где

$$\Phi_n(t) = 2\int_0^{\pi} \Phi(\eta, t) \sin n\pi\eta \, d\eta.$$

Тогда можно доказать:

Теорема. *Дифференциальное уравнение* (1) *допускает непрерывное решение вместе со своими частными производными до второго порядка в области* $\overline{D}$, *удовлетворяющее условиям* (2), *если*:

1) *функция* $\Phi(x, t)$ *удовлетворяет изложенным выше условиям*;

2) $$\left| f'\left(Z_1, \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right) - f'\left(Z_2, \frac{\partial Z_2}{\partial x}\right) \right| \leqslant A |Z_1 - Z_2| + B \left| \frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial Z_2}{\partial x} \right|,$$

$$f\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=\pi \\ x=0}} \equiv 0;$$

3) f *ограничена при конечном изменении* Z *и* $\partial Z / \partial x$.

Докажем эту теорему методом последовательных приближений. За нулевое приближение $Z_0(x, t)$ возьмем решение уравнения

$$\frac{\partial Z_0}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} = \Phi(x, t), \tag{3}$$

удовлетворяющее условиям (2).

Решение $Z_0(x, t)$ будет иметь вид

$$Z_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(0)}(t) \sin n\pi x, \tag{4}$$

где

$$T_n^{(0)}(t)=2\int_0^t e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi)}\,d\xi\int_0^\pi \Phi(\eta,\ \xi)\sin n\pi\eta\, d\eta+$$

$$+2\int_0^1 \frac{e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi+1)}\,d\xi}{1-e^{-a^2n^2\pi^2}}\int_0^\pi \Phi(\eta,\ \xi)\sin n\pi\eta\, d\eta.$$

Зная нулевое приближение $Z_0(x,\ t)$, ищем первое приближение $Z_1(x,\ t)$ и так далее. Продолжая этот процесс, далее можно построить неограниченную последовательность приближений, причем k-е приближение $Z_k(x,\ t)$, как решение уравнения

$$\frac{\partial Z_k}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 Z_k}{\partial x^2}=\Phi(x,\ t)+\mu f\left(Z_{k-1},\ \frac{\partial Z_{k-1}}{\partial x}\right), \tag{5}$$

удовлетворяющее условиям (2), имеет вид

$$Z_k(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(k)}(t)\sin n\pi x, \tag{6}$$

где

$$T_n^{(k)}\quad)=2\int_0^t e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi)}\,d\xi\int_0^\pi\left[\Phi(\eta,\ \xi)+\mu f\left(Z_{k-1},\ \frac{\partial Z_{k-1}}{\partial x}\right)\right]\sin n\pi\eta\, d\eta+$$

$$+2\int_0^1\frac{e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi+1)}d\xi}{1-e^{-a^2n^2\pi^2}}\int_0^\pi\left[\Phi(\eta,\ \xi)+\mu f\left(Z_{k-1},\ \frac{\partial Z_{k-1}}{\partial x}\right)\right]\sin n\pi\eta\, d\eta.$$

Итак, мы имеем последовательность функций

$$Z_1(x,\ t),\ Z_2(x,\ t),\ \ldots,\ Z_k(x,\ t),\ \ldots, \tag{7}$$

непрерывных со своими частными производными до второго порядка в области $\overline{D}$ и удовлетворяющих условиям (2).

Далее, нетрудно убедиться, что функции последовательности (7) равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда, согласно теореме Арцела, мы можем выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность из последовательности (7).

Пусть выбранная подпоследовательность, будет:

$$Z_{m_1}(x,\ t),\ Z_{m_2}(x,\ t),\ \ldots,\ Z_{m_k}(x,\ t),\ \ldots \tag{8}$$

В силу теоремы Арцела имеем

$$\lim_{k\to\infty} Z_{m_k}(x,\ t)=Z(x,\ t),$$

где $Z(x,\ t)$ — непрерывная функция в замкнутой области $\overline{D}$, которую можно написать в виде

$$Z(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin n\pi x,$$

где

$$T_n(t)=2\int\limits_0^t e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi)}\,d\xi\int\limits_0^\pi\left[\Phi(\eta,\ \xi)+\mu f\left(Z,\ \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right]\sin n\pi\eta\,d\eta+$$

$$+2\int\limits_0^1 \frac{e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi+1)}}{1-e^{-a^2n^2\pi^2}}\,d\xi\int\limits_0^\pi\left[\Phi(\eta,\ \xi)+\mu f\left(Z,\ \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right]\sin n\pi\eta\,d\eta.$$

Далее, легко доказать, что ряды

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dT_n(t)}{dt}\sin n\pi x,\qquad \frac{\partial Z}{\partial x}=\sum_{n=1}^{\infty}n\pi T_n(t)\cos n\pi x,$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2T_n(t)\sin n\pi x$$

сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$.

Тем самым теорема доказана.

Поступило
29 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Х. Каримов, Тр. САГУ (1946). [2] Д. Александер, Усп. математ. наук, **2**, в. 1, стр. 157 (1947).