Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

Н. Г. ЧУДАКОВ

О НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММАХ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 30 VI 1947)

В этой работе автор дает новый метод оценки тригонометрических сумм, содержащих простые числа под знаком функции достаточно общего вида. Подобные суммы и аналогичные им уже рассматривались в литературе ([1]). Однако, насколько автору известно, прежние оценки этих сумм не были непосредственно связаны с теорией римановой функции $\zeta(s)$. Установление этой связи является основной целью настоящей работы. При этом удается получить некоторое улучшение самих оценок.

Обозначения. Пусть A и B суть функции переменного ξ, пробегающего элементы некоторого множества E. Будем писать

$$A \ll B,$$

если для всех значений ξ имеет место неравенство

$$|A| \leqslant c\,|B|,$$

где c — положительная постоянная; $A=0$, если $B=0$.

Аналогично пишем

$$B \gg A$$

вместо неравенства

$$|B| \geqslant c\,|A|.$$

Вместо соотношения

$$B \ll A \ll B$$

будем писать

$$A \asymp B.$$

Введенные нами символы напоминают по своим свойствам знаки равенства и неравенств.

Заметим, что $A \ll B$ обозначает то же самое, что и

$$A = O(B).$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$, принимающая только действительные значения, обладает следующими свойствами в интервале $[a, b]$:*

1) *она непрерывна вместе со своей производной;*
2) $0 < \theta \leqslant |f'(x)| \leqslant \pi$;

3) *интервал $[a, b]$ распадается на ν интервалов, в каждом из которых функция $f'(x)$ монотонна.*

Тогда

$$\left|\sum_{a<n<b} \exp if(x)\right| \leqslant 3{,}5\,\pi\nu\theta^{-1}.$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству известной теоремы van der Corput ([2]).

Нужно сначала рассмотреть отдельно каждую часть интервала $[a, b]$, в которой $'(x)$ монотонна; простое суммирование полученных результатов доказывает нашу теорему.

Теорема 2. *Пусть величины $a, b \asymp N$, причем $a<b$; функция $f(x)$ принимает действительные значения в $[a, b]$ и удовлетворяет, кроме того, следующим условиям:*

$$f'(x) \asymp A, \qquad f''(x) \neq 0,$$

$$\frac{d}{dx}xf'(x) \asymp B, \quad \frac{d^2}{dx^2}xf'(x) \neq 0$$

для всех $x \geqslant x_0$, $a \leqslant x \leqslant b$, причем A и B положительные величины и

$$N^{-1} \ll A \ll N^{-3/4}, \qquad B \ll 1.$$

Тогда

$$S = \sum_{a<p<} \exp if(x) \ll \left(\sqrt{\frac{N}{A}} + \sqrt{\frac{N}{B}}\right)\lg N,$$

где p пробегает простые числа интервала $[a, b]$.

Доказательство. Полагаем

$$F(x) = \exp if(x);$$

элементарный расчет показывает, что

$$S = \sum_{a<n\leqslant b} \frac{\Lambda(n)}{\lg n} F(n) + O(N^{1/2}), \tag{1}$$

где $\Lambda(n)$ — функция Mangoldt'a.

С другой стороны, известно ([3]), что для $3 \leqslant T \leqslant x$

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} + R_x, \qquad R_x \ll \frac{x\lg^2 x}{T},$$

где

$$\psi(x) = \sum_{n<x} \Lambda(n).$$

Следовательно,

$$\sum_{a<n<b} \frac{\Lambda(n)}{\lg n} F(n) = \sum_{a<n<b} \frac{F(n)}{\lg n} - \sum_{|\gamma|<T} \sum_{a<n<b} \frac{n^\rho - (n-1)^\rho}{\rho\lg n} F(n) +$$
$$+ \sum_{a\leqslant n<b} \frac{R_n - R_{n-1}}{\lg n} F(n). \tag{2}$$

Полагаем теперь $T = (NA)^{1/2}$; после элементарных преобразований имеем:

$$\sum_{a<n<b} \frac{R_n - R_{n-1}}{\lg n} F(n) \ll \frac{N^2 A \lg N}{T} \ll \sqrt{\frac{N}{A}} \lg N. \tag{3}$$

Далее легко видеть, что для функции $f(x)$ выполнены все условия теоремы 1, поэтому последняя дает:

$$\sum_{a<n<b} \frac{F(n)}{\lg n} \ll (\lg N)^{-1} \max_{a<b'<b} \sum_{n=a}^{b'} F(n) \ll A^{-1} \ll \sqrt{\frac{N}{A}}. \qquad (4)$$

Наконец, элементарные оценки убеждают в том, что

$$\sum_{|\gamma|<T} \sum_{a\leqslant n\leqslant b} \frac{n^\rho-(n-1)^\rho}{\rho \lg n} F(n) = \sum_{|\gamma|<} \sum_{a\leqslant n<b} \frac{n^{\rho-1} F(n)}{\lg n} + O(T^2 \lg T). \qquad (5)$$

Но к функции

$$\Phi(x) = F(x)\, x^{\gamma i}$$

опять приложима теорема 1; в самом деле,

$$\Phi(x) = \exp i\varphi(x), \qquad \text{где } \varphi(x) = f(x) + \gamma \lg x.$$

А в силу сделанных предположений

$$\frac{d}{dx}(x^2 \varphi''(x)) = x \frac{d^2}{dx^2}(xf'(x)) \neq 0,$$

поэтому $\varphi''(x)$ может менять знак только один раз, т. е. $\nu=2$.

Выберем теперь постоянную c так, чтобы

$$\min_{[a,\,b]} \left| \frac{d}{dx} xf'(x) \right| \sqrt{\frac{N}{B}} - c\sqrt{NB} \gg \sqrt{NB};$$

пусть в $[a, b]$ найдется такое x_0, что

$$|x_0 f'(x_0) + \gamma| \leqslant c\sqrt{NB}.$$

Тогда для всех $|x - x_0| \geqslant \sqrt{\frac{N}{B}}$ будем иметь:

$$\varphi'(x) \gg \sqrt{\frac{B}{N}}.$$

Следовательно, теорема 1 дает для таких значений x:

$$\sum_{|n-x_0| > N^{1/2}B^{-1/2}} F(n) \ll N^{1/2} B^{-1/2},$$

т. е.

$$\sum_{a\leqslant n\leqslant b'}^{*} \Phi(n) \ll N^{1/2} B^{-1/2}.$$

Поэтому, применяя формулу почленного интегрирования интеграла Стильтьеса, имеем

$$\sum_{|\gamma|<T} \sum_{a\leqslant n\leqslant b} \frac{n^{\rho-1}F(n)}{\lg n} \ll \sum_{|\gamma|<T} \frac{N^{\beta-1}}{\lg N} \sqrt{\frac{N}{B}} \ll \frac{T}{\sqrt{B}} \int_{1/2}^{1} N(\sigma, T) \frac{N^{\sigma-1/2}}{\sqrt{B}}\, d\sigma \ll$$

$$\ll \sqrt{\frac{N}{B}} + \int_{1/2}^{1} T^{\frac{8}{3}(1-\sigma)} N^{\sigma-1/2} B^{-1/2} d\sigma \ll \sqrt{\frac{N}{B}}, \qquad (6)$$

причем используется известный ([3]) результат Ingham'a:

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{8}{3}(1-\sigma)}.$$

Соотношения (1) — (6) доказывают теорему 2.

Пример. Пусть $a, b, c \asymp N$, тогда теорема 2 дает следующие оценки: если $1 \ll t \ll N^{1/4}$, то

$$\sum_{a<p<b} \exp it \lg (c+p) \ll \frac{N \lg N}{\sqrt{t}};$$

если $1/4 \leqslant \mu \leqslant 2$, $a \geqslant e^2$, $1 \ll t \ll (\lg N)^{-1} N^{1/4}$, то

$$\sum_{a<p<b} \exp it (\lg p)^{\mu} \ll N (\lg N)^{11/8} t^{-1/8} |\mu - 1|^{-1/8};$$

если $|\mu| \leqslant 1/2$, $a \geqslant \exp e^6$, $1 \ll t \ll N^{1/4} (\lg \lg N)^{-3/8}$, то

$$\sum_{a<p<b} \exp it \lg p (\lg \lg p)^{\mu} \ll N (\lg N \lg \lg N)^{9/8} t^{-1/8} |\mu|^{-1/8}.$$

Саратовский государственный
университет

Поступило
30 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Виноградов, ДАН, 30, 283 (1941). [2] E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, I, Satz 352, 1927. [3] A. E. Ingham, The Quarterly J. of Mathemat. Oxford ser., 8, No. 32 (1937).