Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

Е. Я. РЕМЕЗ

О ХАРАКТЕРЕ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА ПОЛИА—ДЖЕКСОНА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 VI 1947)

Известными результатами Полиа ([1]) и Джексона ([2]) был установлен (применительно к основным простейшим случаям) факт сходимости средних степенных приближений с индексом $m \to \infty$ к приближениям чебышевским при условии равномерной непрерывности (обобщенных) полиномов:

$$\Phi(x) = v_0(x) + P(x) = v_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i v_i(x), \tag{1}$$

уклонение коих от нуля (соответственно — среднее степенное или же равномерное) подлежит минимизации в сопоставляемых двух задачах апроксимации. Можно заметить мимоходом, что для установления рассматриваемого факта сходимости упомянутое условие (равномерной) непрерывности является достаточным, но не необходимым. С другой стороны, когда мне в последнее время по ходу моих исследований, относящихся к проблеме фактического построения решений, пришлось заняться более точным изучением вопросов, касающихся уже быстроты сходимости рассматриваемого процесса Полиа — Джексона*, то первым фактом принципиального значения, который представилось возможным установить на этом пути, оказался отрицательного характера факт — недостаточность упомянутого общего условия равномерной непрерывности для получения каких-либо оценок быстроты сходимости.

Пусть, для конкретности $v_0(x), v_1(x), \ldots, v_n(x)$ и полиномы (1) обозначают действительные числовые функции действительного числового аргумента x, пробегающего одномерный замкнутый интервал $[a, b]$. Мы предположим функции $v_i(x)$ непрерывными на $[a, b]$, а также линейно независимыми. Две рассматриваемые задачи апроксимации формулируются, соответственно, в виде:

$$\delta_m[\Phi] \equiv \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b |\Phi(x)|^m dx\right]^{1/m} \equiv \delta_m(c_1, \ldots, c_n) = \min \quad (m > 1), \tag{2}$$

$$\delta_0[\Phi] \equiv \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\Phi(x)| \equiv \delta_0(c_1, \ldots, c_n) = \min. \tag{3}$$

---

* Эти вопросы, естественно, встали передо мной после того, как мной был предложен ([3]) метод (последовательных квадратических приближений) для фактического построения решений задачи средней степенной апроксимации.

Мысль заняться ближе изучением вопросов быстроты сходимости предельного перехода Полиа — Джексона окончательно оформилась у меня после того, как важность исследования этого круга вопросов была отмечена акад. С. Н. Бернштейном на заседании Математической секции февральской сессии АН УССР в Москве (1944 г.).

Мы обозначим через $\Phi_m(x)$ решение (единственное для всякого m) задачи (2) и через $\Phi_0(x)$ решение (какое-нибудь из решений, если их бесконечно много) задачи (3). Обозначая далее $\delta_0[\Phi_0]=\rho$, положим

$$\delta_0[\Phi_m]-\rho=2\alpha_m\rho=2\alpha\rho. \tag{4}$$

Неотрицательное число $2\alpha=2\alpha_m$ характеризует относительное ухудшение величины равномерного приближения при замене $\Phi_0(x)$ на $\Phi_m(x)$. Очевидно, что $\alpha_m\to 0$ при $m\to\infty$ в силу теоремы Полиа — Джексона.

Упомянутый первый результат нашего исследования формулируется в виде следующей теоремы, представляющей очевидную аналогию с известной теоремою Лебега, относящейся к существенно иному кругу вопросов [4,5].

Теорема. *Пусть дана произвольная положительная функция $h(m)$, определенная для $m\geqslant 1$ и стремящаяся к нулю при $m\to\infty$. Тогда можно указать систему непрерывных функций $v_i(x)$ на соответствующем сегменте, для которой величина $\alpha=\alpha_m$, определяемая формулою* (4), *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\alpha_m}{h(m)}=\infty. \tag{5}$$

Доказательство. Не изменяя сути вопроса, можно, очевидно, предположить функцию $h(m)$ ограниченной, далее — большею $1/m$ * и монотонно убывающей, что наверное обеспечивается, если заменить $h(m)$ функцией

$$\bar{h}(m)=\frac{1}{m}+\sup_{M\geqslant m}h(M). \tag{6}$$

Обозначим

$$\sqrt{\bar{h}(m)}=\psi(m) \tag{7}$$

и введем в рассмотрение непрерывную функцию $f(x)$, определяемую на сегменте $[0, 2]$ следующими условиями: полагая последовательно

$$k_i=e^{-\sum\limits_{\nu=1}^{i-1}\nu\psi(\nu)}\quad (i\geqslant 2),\qquad k_1=1, \tag{8}$$

$$f(k_i)=e^{-\psi(i-1)}\quad (i\geqslant 2),\qquad f(k_1)=0^{**}, \tag{9}$$

затем полагая $f(x)$ линейной на каждом из сегментов $[k_{i+1},\ k_i]$, добавим условия: $f(0)=1$, $f(x)=0$ при $1\leqslant x\leqslant 2$.

Оценивая для целых значений $m\geqslant 2$ интеграл

$$J_{m-1}=\int_0^2[f(x)]^{m-1}dx=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{k_{i+1}}^{k_i}[f(x)]^{m-1}dx<\sum_{i=1}^{\infty}[f(k_{i+1})]^{m-1}k_i, \tag{10}$$

---

* Кстати, при $h(m)\leqslant 1/m$, как мы покажем в другом месте, соотношение (5) может быть осуществлено для полиномов $\Phi(x)$ не только непрерывных, но и обладающих сколь угодно регулярным течением, в частности, для целых рациональных полиномов.

** Ясно, что $0<k_i\leqslant e^{-\sum\limits_{\nu=1}^{i-1}\sqrt{\nu}}\to 0$ при $i\to\infty$, в то время как $\lim f(k_i)=1$, поскольку $\lim\psi(i-1)=0$.

получаем без труда:

$$J_{m-1} < me^{-(m-1)\psi(m)} + \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\sum\limits_{\nu=m-1}^{m+j} \nu\psi(\nu)} <$$

$$< me^{-(m-1)\psi(m)} + e^{-(m-1)\psi(m)} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\sum\limits_{\nu=0}^{m+j} \sqrt{\nu}} <$$

$$< (m+1)e^{-(m-1)\psi(m)} = e^{-(m-1)\left[\psi(m) - \frac{\log(m+1)}{m-1}\right]}, \tag{11}$$

откуда

$$J_{m-1} < e^{-(m-1)\psi(m)(1-\varepsilon)} \quad (\varepsilon = \varepsilon_m \to 0 \text{ при } m \to \infty). \tag{12}$$

Вводим теперь в рассмотрение полиномы

$$\Phi(x) = f(x) - c \qquad (v_0(x) \equiv f(x), \quad v_1(x) \equiv -1) \tag{13}$$

относительно которых и рассматриваем на сегменте [0, 2] задачи (2), (3). Для определения значения $c = c(m)$ в $\Phi_m(x)$ $(0 < c(m) < 1,\ c(m) \to \to \rho = {}^1/_2$ при $m \to \infty)$ будем иметь, как легко видеть, уравнение

$$\int_0^{c'} [f(x) - c]^{m-1} dx = \int_{c'}^{2} [c - f(x)]^{m-1} dx \quad (f(c') = c) \tag{14}$$

или

$$(1-c)^{m-1} I = c^{m-1}(1+\eta) \quad \left(\lim_{m \to \infty} \eta = 0\right), \tag{15}$$

где при $[m] = m'$ имеем:

$$I = \int_0^{c'} \left[\frac{f(x)-c}{1-c}\right]^{m-1} dx < \int_0^{c'} [f(x)]^{m-1} dx < \int_0^{2} [f(x)]^{m-1} dx \leqslant$$

$$\leqslant J_{m'-1} < e^{-(m'-1)\psi(m')(1-\varepsilon)} \leqslant e^{-(m'-1)\psi(m)(1-\varepsilon)}. \tag{16}$$

Подставляя в (15), вместе с найденной границей для I, выражения $1 - c = {}^1/_2 + \alpha$, $c = {}^1/_2 - \alpha$ $(\alpha = \alpha_m)$, придем к соотношению

$$\left(\frac{1+2\alpha}{1-2\alpha}\right)^{m-1} e^{-(m'-1)\psi(m)(1-\varepsilon)} > 1 + \eta. \tag{17}$$

Логарифмируя и вводя вспомогательные величины

$$\sigma' = \frac{\log(1+2\alpha)}{2\alpha}, \quad \sigma'' = \frac{\log(1-2\alpha)}{-2\alpha}, \quad \sigma = \frac{\sigma' + \sigma''}{2}, \tag{18}$$

имеем, обозначая через $\pm\varepsilon'$ новую бесконечно малую,

$$4\alpha\sigma(m-1) > \log(1+\eta) + (m'-1)\psi(m)(1-\varepsilon) = (m'-1)\psi(m)(1 \pm \varepsilon').$$

Поскольку же при $m \to \infty$ имеем $\alpha \to 0$, $\sigma \to 1$, $\frac{m'-1}{m-1} \to 1$, то приходим к неравенству вида

$$\alpha = \alpha_m > \frac{1 \pm \varepsilon''}{4} \psi(m) = \frac{1 \pm \varepsilon''}{4} \sqrt{h(m)} \quad \left(\lim_{m \to \infty} \varepsilon'' = 0\right), \tag{19}$$

откуда

$$\frac{\alpha_m}{\bar{h}(m)} > \frac{1 \pm \varepsilon''}{4\sqrt{\bar{h}(m)}}, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha_m}{\bar{h}(m)} = \infty, \tag{20}$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Смысл доказанной теоремы тот, что в общем случае непрерывных функций $v_l(x)$ сходимость процесса Полиа—Джексона хотя и обеспечена, но может в зависимости от конкретных обстоятельств оказаться сколь угодно медленной*. Для возможности получения каких-либо оценок быстроты сходимости — в смысле определения, прежде всего, порядка бесконечно малой величины $\alpha = \alpha_m$ (или ее верхней границы) при $m \to \infty$ и т. д. — оказывается необходимым подразделить класс непрерывных функций путем введения тех или других уточняющих структурных условий. Результаты такого исследования составят предмет отдельного сообщения автора.

Поступило
19 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Pólya, C. R., 157 (1913). [2] D. Jackson, Trans. Amer. Math. Soc., 22 (1921). [3] Е. Я. Ремез, ДАН, 28, № 5 (1940); Матем. сб., 9 (51): 2 (1941); Ювіл. Збірник АН УРСР, 1 (1944). [4] H. Lebesgue, Ann. Fac. des Sc. Toulouse (1909). [5] С. Н. Бернштейн, О наилучшем приближении непрерывных функций посредством полиномов данной степени, Харьков, 1912, стр. 43.

* Было бы заведомо бесполезно искать для быстроты сходимости рассматриваемого здесь в общих условиях процесса противоположной оценки, в смысле определения какой-нибудь „максимально возможной" быстроты сходимости. Действительно, если, например, в обобщенном полиноме $\Phi(x)$ того же вида (13) задать непрерывную функцию $f(x)$ на сегменте $[-1, +1]$, положив ее равною ∓ 1 соответственно на сегментах $[-1, -h]$ и $[h, 1]$ и возрастающею на интервале $(-h, h)$, то, соответственно уточняя ее определение на этом последнем интервале с использованием некоторых методов оценки интегралов, применяемых мною в дальнейших исследованиях по данному предмету, оказывается возможным получать разнообразные случаи несравненно более быстрого стремления α_m к нулю, чем это имело место в тех случаях, к которым относилась первая сноска стр. 1284; с другой же стороны, как легко видеть непосредственно (учитывая (14)), мы будем иметь даже тождественно $\alpha_m = 0$ для всех рассматриваемых значений m, если подчинить упомянутую возрастающую функцию $f(x)$ условию нечетности также и при $-h < x < h$ — совершенно независимо в остальном от степени регулярности ее локальной структуры.