Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

Д. А. РАЙКОВ

О РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ СХОДИМОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 VI 1947)

В настоящей заметке устанавливаются связи между различными типами сходимости непрерывных положительно определенных функций на произвольной локально бикомпактной группе.

Функция $\varphi(g)$, заданная на группе G, называется положительно определенной, если

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi(g_k g_l^{-1})\xi_k\bar{\xi}_l \geqslant 0$$

для любого конечного числа элементов $g_1, \ldots, g_n \in G$ и любых комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$. В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства положительно определенных функций:

1) ограниченность, а именно

$$\max_{g\in G}|\varphi(g)| = \varphi(e) \tag{1}$$

(e — единица группы G);

2) „эрмитовость“: $\overline{\varphi(g^{-1})} \equiv \varphi(g)$;

3) неравенство М. Г. Крейна ([1]):

$$|\varphi(g)-\varphi(h)|^2 \leqslant 2\varphi(e)[\varphi(e)-\Re\varphi(g^{-1}h)]$$

($\Re$ — символ вещественной части).

Встречаются следующие типы сходимости непрерывных положительно определенных функций на топологической группе: сходимость

I) в каждой точке;

II) равномерная на каждом бикомпактном множестве;

III) равномерная на всей группе.

С другой стороны, непрерывные положительно определенные функции на локально бикомпактной группе естественно рассматривать как линейные функционалы в некотором банаховском пространстве, и тогда на эти функции переносятся типы сходимости, обычные в функциональном анализе.

Как известно ([2]), на каждой локально бикомпактной группе G существует лево-инвариантная мера Хаара, т. е. неотрицательная вполне аддитивная функция множеств m, определенная на теле $\mathfrak{B}$ борелевских множеств, конечная на бикомпактных множествах, положительная на открытых множествах и обладающая тем свойством, что $m(gE)=m(E)$ для любого $E\in\mathfrak{B}$ и любого $g\in G$. Совокупность всех комплексных функций $x(g)$, измеримых и абсолютно интегрируемых по этой мере, образует банаховское пространство $L_1(G)$ с нор-мой $\|x\| = \int |x(g)| dg$, где интеграция производится по мере m, а об-ластью интеграции служит вся группа G. Мера m, вообще говоря не право-инвариантна; но $m(Eg) = l_g m(E)$, где l_g — непрерывная функ-ция от g, не зависящая от E и такая, что $l_{gh} = l_g l_h$. Кроме того ([3]

$$\int x(g)\,dg = \int x(g^{-1})\, l_g^{-1}\, dg$$

для любой функции $x(g) \in L_1(G)$.

Каждой непрерывной положительно определенной функции $\varphi(g$ соответствует в $L_1(G)$ линейный функционал

$$\Phi\{x\} = \int \varphi(g)\, x(g)\, dg,$$

причем $|\Phi| = \varphi(e)$. Встречаются следующие типы сходимости непре-рывных положительно определенных функций, рассматриваемых как такие функционалы:

I′) слабая: непрерывные положительно определенные функции $\varphi_n(g)$ слабо сходятся, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого конечного числа функций $x_1(g), \ldots, x_k(g) \in L_1(G)$ существует номер N такой, что

$$\left| \int [\varphi_n(g) - \varphi_m(g)]\, x_i(g)\, dg \right| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, k)$$

для всех $m, n > N$;

II′) слабая со сходимостью норм к норме предела: непрерывные положительно определенные функции $\varphi_n(g)$ слабо сходятся к непре-рывной положительно определенной функции $\varphi(g)$ и $\varphi_n(e) \to \varphi(e)$;

III′) сильная: $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \left| \int [\varphi_n(g) - \varphi_m(g)]\, x(g)\, dg \right| \to 0$ при $m, n \to \infty$.

Как легко видеть, сходимости типов III и III′ равносильны. Далее, из сходимости типа I следует сходимость типа I′ (но не обратно), а в случае непрерывности предельной функции — и сходимость ти-па II′. Мы докажем, что сходимости типов II и II′ равносильны (тео-рема 1). Отсюда будет следовать, что сходимость типа I, в случае непрерывности предельной функции, есть, вместе с тем, и сходимость типа II (теорема 2); для положительно определенных функций веще-ственного переменного это доказал впервые В. И. Гливенко ([4]).

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывные положительно определенные функции $\varphi_n(g)$ на локально бикомпактной группе G сходились к непрерывной положительно определенной функции $\varphi(g)$ равномерно на каждом бикомпактном множестве, необходимо и достаточно, чтобы* 1) *$\varphi_n(g)$ слабо сходились к $\varphi(g)$ и* 2) $\varphi_n(e) \to \varphi(e)$.

Необходимость проверяется непосредственно. Достаточность мы докажем даже с заменой предположения 2) более слабым:

2′) $\overline{\lim}\, \varphi_n(e) \leqslant \varphi(e)$.

Доказательство. Если $\varphi(e) = 0$, то утверждение теоремы, и даже равномерная сходимость на всей группе G, следует уже из одного условия 2) в силу соотношения (1). Пусть $\varphi(e) \neq 0$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\varphi(e) = 1$. Пусть K — произвольное фиксированное бикомпактное множество на G и $\varepsilon > 0$. По предположению, $\varphi(g)$ непрерывна и значит, как следует из нера-венства Крейна, равномерно непрерывна. Поэтому существует биком-пактная окрестность U единицы такая, что $|\varphi(h) - \varphi(g)| < \varepsilon$ при $h^{-1}g \in U^2$. Так как U предположена бикомпактной, то существует окрестность V единицы такая, что $\frac{m(VU)}{m(U)}<1+\varepsilon$; при этом можно считать, что $V\subset U$. Наконец, в силу бикомпактности множества K, существует конечное число элементов $g_1,\ldots,g_v$ таких, что $\mathrm{K}\subset\bigcup_{i=1}^{v}g_iV^{-1}$.

Обозначая через $f_E(g)$ характеристическую функцию множества E, положим

$$x_i(g)=\frac{1}{m(U)}f_U(g_i^{-1}g)\quad(i=1,\ldots,v)$$

и

$$x_0(g)=\frac{1}{m(VU)}[f_{VU}(g)+l_g^{-1}f_{(VU)^{-1}}(g)].$$

В силу предположений теоремы, существует такой номер N, что для всех $n>N$

$$\left|\int[\varphi(g)-\varphi_n(g)]\,x_i(g)\,dg\right|<\varepsilon\quad(i=0,1,\ldots,v)\text{ и }\varphi_n(e)<\varphi(e)+\varepsilon=1+\varepsilon.$$

Пусть h — произвольный элемент из K. Среди элементов $g_1,\ldots,g_v$ найдется по крайней мере один, g_j, такой, что $h^{-1}g_j\in V$. Так как

$$\varphi(h)-\varphi_n(h)=[\varphi(g_jg)-\varphi_n(g_jg)]+[\varphi(h)-\varphi(g_jg)]-[\varphi_n(h)-\varphi_n(g_jg)],$$

то, интегрируя по переменному g на множестве U и деля на $m(U)$, получаем:

$$|\varphi(h)-\varphi_n(h)|\leqslant\left|\frac{1}{m(U)}\int_U[\varphi(g_jg)-\varphi_n(g_jg)]\,dg\right|+$$
$$+\left|\frac{1}{m(U)}\int_U[\varphi(h)-\varphi(g_jg)]\,dg\right|+\left|\frac{1}{m(U)}\int_U[\varphi_n(h)-\varphi_n(g_jg)]\,dg\right|.$$

Первые два интеграла оцениваются просто:

$$\left|\frac{1}{m(U)}\int_U[\varphi(g_jg)-\varphi_n(g_jg)]\,dg\right|=\left|\int[\varphi(g)-\varphi_n(g)]x_j(g)\,dg\right|<\varepsilon,$$

и так как $h^{-1}g_jg\in VU\subset U^2$ при $g\in U$, то

$$\left|\frac{1}{m(U)}\int_U[\varphi(h)-\varphi(g_jg)]\,dg\right|\leqslant\varepsilon.$$

Оценку третьего интеграла мы проведем следующим способом (ср. ([5]), стр. 315). Предполагая, что $n>N$, и применяя сначала неравенства Шварца и Крейна, получаем:

$$\left|\frac{1}{m(U)}\int_U[\varphi_n(h)-\varphi_n(g_jg)]\,dg\right|^2\leqslant\frac{1}{m(U)}\int_U|\varphi_n(h)-\varphi_n(g_jg)|^2\,dg\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\varphi_n(e)}{m(U)}\int_U[\varphi_n(e)-\Re\varphi_n(h^{-1}g_jg)]\,dg\leqslant\frac{2\varphi_n(e)}{m(U)}\int_{VU}[\varphi_n(e)-\Re\varphi_n(g)]\,dg\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2(1+\varepsilon)^2}{m(VU)}\int_{VU}[1+\varepsilon-\Re\varphi_n(g)]\,dg\leqslant$$
$$\leqslant2(1+\varepsilon)^2\varepsilon+\frac{2(1+\varepsilon)^2}{m(VU)}\int_{VU}[1-\Re\varphi(g)]\,dg+\left|\frac{2(1+\varepsilon)^2}{m(VU)}\int_{VU}[\Re\varphi(g)-\Re\varphi_n(g)]dg\right|\leqslant$$
$$\leqslant4(1+\varepsilon)^2\varepsilon+\left|\frac{(1+\varepsilon)^2}{m(VU)}\int_{VU}\{[\varphi(g)-\varphi_n(g)]+[\varphi(g^{-1})-\varphi_n(g^{-1})]\}\,dg\right|=$$
$$=4(1+\varepsilon)^2\varepsilon+(1+\varepsilon)^2\left|\int[\varphi(g)-\varphi_n(g)]\,x_0(g)\,dg\right|<5(1+\varepsilon)^2\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{1}{m(U)}\int\limits_U [\varphi_n(h)-\varphi_n(g_jg)]\,dg\right| < (1+\varepsilon)\sqrt{5\varepsilon}\,.$$

Соединяя все три оценки, получаем, что

$$|\varphi(h)-\varphi_n(h)| < 2\varepsilon + (1+\varepsilon)\sqrt{5\varepsilon}$$

для всех $h \in K$, и теорема доказана.

Замечания. 1. Теорема и доказательство остаются в силе, если целочисленные индексы n заменить любой „направленной системой" индексов, а сходимость понимать в смысле С. О. Шатуновского и Мура-Смита ([7], [8]).

2. Каждый линейный функционал Ψ в $L_1(G)$ имеет вид $\Psi\{x\} = \int \psi(g)\,x(g)\,dg$, где $\psi(g)$ — некоторая измеримая функция, причем $\operatorname{vrai\,max}|\psi(g)| < \infty$. Функционал Ψ называется позитивным, если

$$\iint \psi(gh^{-1})\,x(g)\,\overline{x(h)}\,dg\,dh \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in L_1(G).$$

Каждая непрерывная положительно определенная функция φ порождает позитивный функционал Φ. И. М. Гельфандом и мною было доказано ([5], [6]), что и обратно каждый позитивный функционал порождается непрерывной положительно определенной функцией. Так как, кроме того, совокупность позитивных функционалов слабо замкнута, то заключаем, что теорему 1 можно сформулировать следующим образом:

Если позитивные функционалы Φ_α слабо сходятся к (позитивному) функционалу Φ и $|\Phi_\alpha| \to |\Phi|$, то непрерывные положительно определенные функции $\varphi_\alpha(g)$, соответствующие функционалам Φ_α, сходятся к непрерывной положительно определенной функции $\varphi(g)$, соответствующей функционалу Φ, равномерно на каждом бикомпактном множестве.

Теорема 2. *Последовательность непрерывных положительно определенных функций $\varphi_n(g)$ на локально бикомпактной группе G, сходящаяся в каждой точке $g \in G$ к непрерывной положительно определенной функции $\varphi(g)$, сходится равномерно на каждом бикомпактном множестве.*

Доказательство. Условие 2) теоремы 1 выполнено прямо по предположению. Отсюда и из (1) следует, что $\varphi_n(g)$ ограниченно сходятся к $\varphi(g)$. В силу известной теоремы Лебега, тогда $\int \varphi_n(g)\,x(g)\,dg \to \int \varphi(g)\,x(g)\,dg$ для всех $x \in L_1(G)$, т. е. выполнено и условие 1) теоремы 1.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
30 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, 32, № 2 (1939). [2] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, 1940. [3] J. v. Neumann, Матем. сб., 1 (43) (1936). [4] V. Glivenko, Giorn. Instit. Ital. Attuari, 7, 2 (1936). [5] И. М. Гельфанд и Д. А. Райков, Матем. сб., 13 (55) (1943). [6] И. М. Гельфанд и Д. А. Райков, ДАН, 42, № 5 (1944). [7] С. О. Шатуновский, Введение в анализ, Одесса, 1923. [8] E. H. Moore and H. L. Smith, Amer. J. Math., 44 (1922).