Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

О p-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком И. Г. Петровским 7 VII 1947)

Эта заметка посвящается распространению свойств аналитических функций комплексного переменного на функции комплексного переменного более широкого класса. Я доказываю теорему единственности, принцип сохранения области, теорему Коши и вывожу формулу Коши для так называемых p-аналитических функций.

В дальнейшем важную роль будет играть однозначная положительная функция, называемая, для определенности, p-характеристикой.

Определение. Пусть p-характеристика $p=p(z)$ определена в некоторой области G, лежащей в конечной части плоскости комплексного переменного $z=x+iy$. Однозначную функцию $w=f(z)=u+iv$ будем называть p-аналитической в области G, если в этой области u и v имеют непрерывные частные производные по x и y первого порядка и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$u_x=\frac{1}{p(z)}v_y, \quad u_y=-\frac{1}{p(z)}v_x. \tag{1}$$

Понятие p-аналитической функции, согласно определению, относится к области, но мы будем говорить также о функции, p-аналитической в точке, если она p-аналитическая в некоторой достаточно малой области, содержащей эту точку. Функцию, p-аналитическую в каждой точке замкнутой области, будем называть p-аналитической в замкнутой области.

Предположим, что p-характеристика $p=p(z)$ в области G имеет непрерывные частные производные по x и y первого и второго порядков. Пусть D — односвязная область, содержащаяся вместе со своей границей в области G, ограниченная контуром C, разложимым на конечное число непрерывных кривых, на каждой из которых x и y изменяются монотонно. Пусть

$$\gamma(z,\zeta)=\gamma_1(z,\zeta)\ln\frac{1}{r}+\gamma_2(z,\zeta),$$

соответственно

$$\tilde{\gamma}(z,\zeta)=\tilde{\gamma}_1(z,\zeta)\ln\frac{1}{r}+\tilde{\gamma}_2(z,\zeta) \quad (r=|z-\zeta|,\ \zeta=\xi+i\eta)$$

какие-нибудь фундаментальные решения уравнения

$$L(u)=\frac{\partial}{\partial x}(pu_x)+\frac{\partial}{\partial y}(pu_y)=0$$

и, соответственно, уравнения

$$\tilde{L}(u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{p}u_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{p}u_y\right)=0$$

для области D [1]. Положим

$$\Gamma(z,\zeta)=\frac{1}{p(\zeta)}\gamma(z,\zeta),\quad \tilde{\Gamma}(z,\zeta)=p(\zeta)\tilde{\gamma}(z,\zeta). \tag{2}$$

Обозначая через $H(z,\zeta)$ и $\tilde{H}(z,\zeta)$ какие-нибудь решения систем уравнений

$$-\tilde{\Gamma}_x(z,\zeta)=p(z)H_y(z,\zeta),\quad -\tilde{\Gamma}_y(z,\zeta)=-p(z)H_x(z,\zeta), \tag{3}$$

$$-\Gamma_x(z,\zeta)=\frac{1}{p(z)}\tilde{H}_y(z,\zeta),\quad -\Gamma_y(z,\zeta)=-\frac{1}{p(z)}\tilde{H}_x(z,\zeta), \tag{4}$$

функции

$$\Omega(z,\zeta)=-\Gamma(z,\zeta)+iH(z,\zeta),\quad \tilde{\Omega}(z,\zeta)=-\tilde{\Gamma}(z,\zeta)+i\tilde{H}(z,\zeta) \tag{5}$$

назовем сопряженными ядрами p-характеристики $p(z)$ для области D.

Обозначая через X, Y, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ какие-нибудь решения систем уравнений

$$-\tilde{X}_x=p(z)Y_y,\quad -\tilde{X}_y=-p(z)Y_x, \tag{3'}$$

$$-X_x=\frac{1}{p(z)}\tilde{Y}_y,\quad -X_y=-\frac{1}{p(z)}\tilde{Y}_x, \tag{4'}$$

имеющие в замкнутой области $D+C$ однозначные непрерывные частные производные по x и y первого и второго порядков, функции

$$Z=-X+iY,\quad \tilde{Z}=-\tilde{X}+i\tilde{Y} \tag{5'}$$

назовем сопряженными переменными p-характеристики $p(z)$ для области D. Сопряженные ядра и сопряженные переменные p-характеристики $p(z)$ для области D будут также сопряженными ядрами и, соответственно, сопряженными переменными p-характеристики $p(z)$ для всякой области, содержащейся в области D, и в этом смысле они не зависят от области.

Пользуясь преобразованием двойных интегралов в криволинейные, я получаю следующую лемму.

Лемма об интегральных представлениях. *Для произвольной однозначной функции $F(z)=U+iV$, вещественная и мнимая части которой в замкнутой области $D+C$ имеют непрерывные частные производные по x и y первого порядка, для любой точки $\zeta=\xi+i\eta\subset D$ имеет место равенство*

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C U d\tilde{\Omega}(z,\zeta)+iVd\Omega(z,\zeta)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D\left[L(U,V)\,\Omega_x(z,\zeta)+M(U,V)\,\Omega_y(z,\zeta)\right]dxdy, \tag{6}$$

где

$$L(U,V)=pU_x-V_y,\quad M(U,V)=V_x+pU_y.$$

Используя неравенство Шварца, я доказываю следующую лемму.

Лемма о растяжениях. *Пусть функция $\omega=\varphi(z)=\alpha+i\beta$, $\varphi(0)=0$, реализует взаимно однозначное непрерывное отображение* *круга $|z|<1$ на круг $|\omega|<1$. Пусть в области $0<|z|<1$ α и β имеют непрерывные частные производные по x и y первого порядка и якобиан $\alpha_x\beta_y-\alpha_y\beta_x$ отличен от нуля. Тогда, если коэффициент растяжения*

$$K(z)=\lim_{r\to 0}\frac{\max\limits_{|\Delta z|=r}|\varphi(z+\Delta z)-\varphi(z)|}{\min\limits_{|\Delta z|=r}|\varphi(z+\Delta z)-\varphi(z)|}$$

в точке $z=0$ равен единице и в окрестности этой точки удовлетворяет неравенству

$$K(z)-1<M|z|^{\delta},$$

где M и δ — постоянные (не зависящие от z), $\delta>0$, то существуют положительные постоянные A и B такие, что, независимо от z, изменяющегося в области $0<|z|<1$, имеет место неравенство

$$A<\frac{\varphi(z)}{z}<B.$$

Применяя лемму об интегральных представлениях, получаем, что две p-аналитические функции с p-характеристикой, имеющей непрерывные частные производные по x и y первого порядка, совпадающие на бесконечном множестве точек, имеющем предельную точку в области их p-аналитичности, тождественно равны друг другу. Это значит, что теорема единственности для p-аналитических функций в этом случае формулируется так же, как и для аналитических функций комплексного переменного.

Для p-аналитической функции $w=f(z)=u+iv$ с p-характеристикой, имеющей в области ее определения частные производные по x и y первого порядка, удовлетворяющие условию Гельдера с некоторым показателем δ $(0<\delta\leqslant 1)$, из леммы об интегральных представлениях получаем, что точка накопления нулей якобиана $J=u_xv_y-u_yv_x$ не может принадлежать области, в которой данная функция $w=f(z)$ является p-аналитической, другими словами, нули якобиана $J=u_xv_y-u_yv_x$ изолированы. Из леммы о растяжениях, пользуясь свойствами квазиконформных отображений ([2]), получаем, что окрестность точки z_0, в которой якобиан $J=u_xv_y-u_yv_x=0$, при помощи функции $w=f(z)=u+iv$ преобразуется в n-листную $(n\geqslant 2)$ окрестность точки $w_0=f(z_0)$ ([3]); при этом найдутся положительные постоянные A' и B' такие, что, независимо от z, в окрестности точки z_0 имеет место неравенство

$$A'<\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)^n}\right|<B'.$$

Таким образом, топологические свойства p-аналитической функции с p-характеристикой, в области ее определения имеющей частные производные по x и y первого порядка, удовлетворяющие условию Гельдера с некоторым показателем δ $(0<\delta\leqslant 1)$, такие же, как и топологические свойства аналитических функций, т. е. p-аналитические функции в этом случае преобразуют область своего определения в область в обобщенном смысле ([3]).

Для функции $w=f(z)=u+iv$, p-аналитической в замкнутой области $D+C$ с p-характеристикой $p(z)$, имеющей непрерывные частные производные по x и y первого и второго порядков, из леммы об интегральных представлениях имеем равенство

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C u\,d\tilde{\Omega}(z,\zeta)+iv\,d\Omega(z,\zeta), \tag{7}$$

где $\Omega(z, \zeta)$ и $\tilde{\Omega}(z, \zeta)$ — сопряженные ядра данной p-характеристики $p(z)$ для области D, а ζ — любая точка области D. Это равенство есть обобщение интеграла Коши теории аналитических функций.

Для этой же функции $w=f(z)=u+iv$ в качестве аналога теоремы Коши получаем равенство

$$\int_C u\,d\tilde{Z}+iv\,dZ=0, \tag{8}$$

где Z и $\tilde{Z}$ — сопряженные переменные данной p-характеристики $p(z)$ для области D. Равенства (7) и (8) остаются справедливыми и в том случае, когда функция $w=f(z)=u+iv$ будет p-аналитической в области D и непрерывной в замкнутой области $D+C$ при условии, если ее p-характеристика $p(z)$ определена и имеет непрерывные частные производные по x и y первого и второго порядков в некоторой области, содержащей область D вместе с ее границей.

Поступило
7 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig, 1912, S. 59—60, 70—73. [2] М. Лаврентьев, Матем. сб., 42: 4 (1935). [3] И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, М., 1938, стр. 43, 271 — 273.