Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

П. И. ПЕТРОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПРОСТРАНСТВ РИМАНА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 VI 1947)

Предметом данной работы является построение наипростейшего базиса полной системы метрическо-скалярных дифференциальных инвариантов третьего порядка трехмерного пространства Римана.

1. В качестве подготовительного упражнения к решению намеченной выше проблемы предпошлем задачу: построить в трехмерном метрическом пространстве, определенном фундаментальным объектом g_{ik}, базис полной системы ортогональных инвариантов симметрического тензора $L_{\alpha\beta}$ и его ковариантной производной, имеющей структуру

$$L^{\sigma}{}_{[\alpha,\sigma]}=0.$$

Как известно, скалярные алгебраические инварианты симметрического тензора валентности два исчерпываются корнями характеристического полинома той симметрической линейной вектор-функции, которую он определяет. Пусть φ_1, φ_2, φ_3 обозначают суммы степеней корней характеристического полинома

$$\left| L^{\alpha}{}_{\beta}-\lambda\delta^{\alpha}{}_{\beta}\right|=0,$$

где $\delta^{\alpha}{}_{\beta}$ — символ Кронекера. Инварианты φ_1, φ_2, φ_3 впервые найдены Ф. М. Суворовым в 1871 г. ([1]).

Тензор $L_{\alpha\beta,\gamma}$, имеющий перечисленные выше алгебраические свойства, в рассматриваемом трехмерном пространстве допускает в качестве своих ортогональных линейных комитантов два симметрических тензора $C_{\alpha\beta\gamma}$, $T_{\alpha\beta}$, где $T^{\sigma}{}_{\sigma}=0$. Так как существенные компоненты $C_{\alpha\beta\gamma}$ $T_{\alpha\beta}$ являются линейно независимыми с постоянными коэффициентами комбинациями от компонент $L_{\alpha\beta,\gamma}$, то задача об определении скалярных метрических инвариантов последнего сводится тем самым к нахождению совместных ортогональных инвариантов двух тензоров $C_{\alpha\beta\gamma}$, $T_{\alpha\beta}$, соответственно, валентности три и два. Симметрический тензор $C_{\alpha\beta\gamma}$ не может иметь ортогонального инварианта нечетной степени. Отсюда непосредственно получается, что скаляры

$$f_1=P^{\sigma}{}_{\sigma},\qquad f_2=Q^{\sigma}{}_{\sigma},\qquad f_3=Q^{\sigma}{}_{\tau}Q^{\tau}{}_{\sigma},$$
$$f_4=P^{\sigma}{}_{\tau}P^{\tau}{}_{\sigma},\qquad f_5=P^{\alpha\beta}Q_{\alpha\beta},\qquad f_6=C_{\alpha\beta\gamma}u^{\alpha}u^{\beta}u^{\gamma},$$

где $P_{\alpha\beta}=C_{\alpha\beta\tau}C^{\sigma\tau}{}_{\sigma}$, $Q_{\alpha\beta}=C_{\alpha\sigma\tau}C^{\sigma\tau}{}_{\beta}$, $u^{\alpha}=C^{\alpha\sigma}{}_{\sigma}$, вместе с известным аффинно-скалярным алгебраическим инвариантом тернарной кубической формы f_7 (инвариантом Aronhold'а ([2])), образуют наипростейший базис полной системы ортогональных инвариантов тернарной кубической формы.

Тензор $T_{\alpha\beta}$ в тернарной области имеет лишь два инварианта

$$\psi_1 = T^{\sigma}{}_{\tau} T^{\tau}{}_{\sigma}, \quad \psi_2 = T^{\sigma}{}_{\tau} T^{\tau}{}_{\tau} T^{\varkappa}{}_{\tau}.$$

Так как три искомых совместных ортогональных инварианта $C_{\alpha\beta\gamma}$, T_{α} должны быть четной степени относительно компонентов первого из этих тензоров, то они должны быть не ниже, чем третьей степени. Следовательно, скаляры

$$\psi_3 = P_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \quad \psi_4 = Q_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \quad \psi_5 = T_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}$$

действительно могут быть включены в базис наинизших инвариантов исходного тензора $L_{\alpha\beta,\gamma}$. Чтобы довести решение намеченной задачи до конца, нужно лишь присоединять еще три скаляра

$$\varphi_4 = L_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \quad \varphi_5 = P_{\alpha\beta} L^{\alpha\beta}, \quad \varphi_6 = Q_{\alpha\beta} L^{\alpha\beta}.$$

Простой подсчет показывает, что между 18 найденными выше инвариантами не может быть функционального соотношения, не содержащего переменных.

2. Тензор кривизны трехмерного пространства и его первое расширение допускают в качестве своих ортогональных линейных комитантов, соответственно, тензор конформности ([3]) и его первую ковариантную производную. Тензор конформности при $n=3$ имеет 6 определяющих, а его ковариантная производная 15. Сопоставив определение ([4]) метрического дифференциального инварианта с предыдущим замечанием, воспользовавшись затем исследованиями п. 1, мы получим следующую теорему:

Рациональные инварианты

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_6, \psi_1, \ldots, \psi_5, f_1, \ldots, f_7$$

образуют наипростейший базис полной системы скалярных метрических дифференциальных инвариантов третьего порядка трехмерного пространства Римана.

3. Риманово пространство, допускающее конформное отображение на евклидово, называется конформно-евклидовым ([5]). Имеет место теорема:

Обыкновенное ([6]) *риманово пространство трех измерений тогда и только тогда конформно-евклидово, если один его скалярный дифференциальный инвариант третьего порядка ψ_1 обращается в нуль.*

Поступило
7 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. М. Суворов, О характеристиках систем трех измерений, Казань, 1871. [2] A. Clebsch, Leçons sur la géométrie, II, 1880, p. 283. [3] R. Weitzenböck, Invariantentheorie, 1923. [4] T. Y. Thomas, The Differential Invariants of Generalized Spaces, 1934, p. 36. [5] I. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, 1924, S. 169. [6] И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, I, 1939, § 4.