Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

А. С. КРОНРОД и Е. М. ЛАНДИС

О МНОЖЕСТВАХ УРОВНЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 7 VII 1947)

Определение 1. Множеством уровня E_t действительной функции n переменных $F(\xi)=F(x_1,\ldots,x_n)$ называется множество точек $\xi(x_1,\ldots,x_n)$ таких, что $F(\xi)=t$.

Определение 2. Свойство A имеет место для почти всех уровней, если множество таких t, для которых E_t не обладает свойством A, имеет меру нуль (по оси t).

В настоящей заметке исследуется топологическая структура и дифференцируемость множеств уровня E_t функции многих переменных $F(\xi)$ в зависимости от гладкости функции $F(\xi)$, причем изучаются свойства, имеющие место для почти всех множеств уровня.

Обозначим через R_n n-мерное евклидово пространство.

Определение 3. Пусть $F(\xi)$ — функция, заданная на множестве $E\subset R_n$. Функция $F(\xi)$ называется слабо дифференцируемой до k-го порядка по множеству E в точке ξ_0, если существует полином $P(\xi_0,\xi)\equiv P(\xi)$ степени k такой, что $\lim\limits_{\xi\to\xi_0}\frac{F(\xi)-P(\xi)}{(\xi-\xi_0)^k}=0$, причем $\xi\subset E$. Каждый полином $P(\xi_0,\xi)$, удовлетворяющий этому требованию, называется слабым дифференциалом k-го порядка функции $F(\xi)$ в точке ξ_0 по множеству E.

Определение 4. Функция $F(\xi)$, заданная на множестве $E\subset R_n$, называется сильно дифференцируемой до k-го порядка по множеству E, если функция $F(\xi)$ слабо дифференцируема в каждой точке $\xi\subset E$, причем существуют такие слабые дифференциалы $P(\xi,\eta)$, что, какова бы ни была прямоугольная система координат $x_1,\ldots,x_n$ с началом в точке $\xi\subset E$, для любого $r\leqslant k-1$ имеет место

$$\lim_{\eta\to\xi}\frac{\dfrac{\partial^r P(\eta,\xi)}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}-\dfrac{\partial^r P(\xi,\xi)}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}}{|\eta-\xi|}=\frac{\partial^{r+1}P(\xi,\xi)}{\partial x_1^{l_1+1}\ldots\partial x_n^{l_n}},$$

$$l_1+l_2+\ldots+l_n=r,$$

если $\eta\subset E$ и $x_i(\eta)/x_1(\eta)\to 0$ $(i=2,3,\ldots,n)$ при $\eta\to\xi$, где через $x_i(\zeta)$ обозначена i-я координата точки ζ.

Имеет место следующая теорема Whitney ([1]):

Если множество $E\subset R_n$ замкнуто и функция $F(\xi)$ сильно дифференцируема по множеству E до k-го порядка, то ее можно продолжить на все R_n так, чтобы продолженная функция была дифференцируема до k-го порядка в обычном смысле.

Лемма 1. *Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — m раз дифференцируемая функция, заданная в R_n. Пусть в точке $x_1^0, \ldots, x_n^0$ первые k последовательных слабых дифференциалов функции F существуют и равны нулю. Пусть, далее, $\Phi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — $m-k$ раз дифференцируемая в точке $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$ функция (в слабом смысле) и $x_n^0 = \Phi(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$. Тогда функция $n-1$ переменного $F[x_1, \ldots, x_{n-1}, \Phi(x_1, \ldots, x_{n-1})]$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ слабо дифференцируема до порядка m.*

Доказательство легко получается с помощью разложения функций F и Φ в ряд Маклорена с остаточными членами.

Определение 5. Пусть задана функция $t(\xi)$ на множестве $E \subset R_n$. Мерой множества E по t называется мера множества значений функции $t(\xi)$ при $\xi \subset E$.

Лемма 2. *Пусть $E \subset R_n$ есть B-множество, $t(\xi)$ $(\xi \subset E)$ — непрерывная функция и мера E по t положительна. Тогда существует замкнутое множество $F \subset E$ положительной меры по t.*

Лемма 3. *Для каждой тройки натуральных n, r, s существует константа $C_{n,r,s}$ такая, что коль скоро P_1 и P_2 суть полиномы степени s от n переменных с равными свободными членами и по крайней мере один из коэффициентов P_1 отличается от соответствующего коэффициента P_1 при члене степени r не меньше, чем на α, то для любого $0 < d \leqslant 1$ найдется точка ξ $(d/2 \leqslant |\xi| \leqslant d)$ такая, что $|P_1(\xi) - P_2(\xi)| \geqslant \alpha C_{n,r,s} |\xi|^r$.*

Лемма 4. *Пусть функция $F(\xi)$ задана в R_n. Пусть $E \subset R_n$ такое B-множество, в каждой точке которого функция $F(\xi)$ слабо дифференцируема до порядка m по R_n. Пусть $t(\xi)$ при $\xi \subset E$ непрерывная функция и мера E по t положительна. Тогда найдется замкнутое множество $E^* \subset E$ положительной меры по t, на котором функция $F(\xi)$ сильно дифференцируема до $m-1$-го порядка.*

Доказательство. Пусть $\xi_0 \subset E$ и $P(\eta)$ — некоторый слабый дифференциал функции $F(\xi)$ в точке ξ_0 по R_n. Тогда при $\varepsilon > 0$ найдется $\rho_\varepsilon(\xi_0) > 0$ такое, что при $|\eta - \xi_0| < \rho_\varepsilon(\xi_0)$ имеет место

$$P(\eta) - \varepsilon |\eta - \xi_0|^m \leqslant F(\eta) \leqslant P(\eta) + \varepsilon |\eta - \xi_0|^m.$$

Пусть $D(\varepsilon, \rho)$ — множество всех точек $\xi \subset E$, для которых $\rho_\varepsilon(\xi) \geqslant \rho$. Тогда $D(\varepsilon, \rho)$ есть B-множество и, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется $\rho > 0$ такое, что мера $D(\varepsilon, \rho)$ по t сколь угодно мало отличается от меры E по t.

По всякому множеству $D(\varepsilon, \rho)$ функция $F(\xi)$ сильно дифференцируема до порядка $m-1$. Действительно, пусть $\xi_0 \subset D = D(\varepsilon, \rho)$; $x_1, \ldots, x_n$ — произвольная прямоугольная система координат с началом в ξ_0 и $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ — последовательность точек из D, сходящихся к ξ_0, причем $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{x_i(\eta_s)}{x_1(\eta_s)} = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_n$ — слабые дифференциалы порядка m по R_n в точках $\xi_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ соответственно.

Пусть $A^*(\eta_n)$ означает частную производную порядка не выше $m-2$ в точке η_n полинома P_n по некоторой фиксированной группе переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Рассмотрим $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{A^*(\eta_n) - A^*(\xi_0)}{|\eta_n - \xi_0|}$. Пусть этот предел не существует, либо отличен от $A^*_{x_1}(\xi_0) = \dfrac{\partial A^*(\xi_0)}{\partial x_1}$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $\tau > 0$ найдется такая точка η_n, что $|\eta_n - \xi_0| < \tau$, $\dfrac{x_i(\eta_n)}{x_1(\eta_n)} < \tau$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ и

$$|A^*(\eta_n) - [A^*(\xi_0) + x_1(\eta_n) A^*_{x_1}(\xi_0)]| > \delta x_1(\eta_n).$$

Пусть P_n^{0*} есть полином P_0, записанный относительно точки η_n плюс разность $F(\eta_n)-P_0(\eta_n)$. Мы имеем в точке η_n два полинома, P_n и P_n^0, причем один из коэффициентов степени не выше $m-2$ у этих полиномов различается не меньше, чем на $\frac{\delta}{2}|\eta_n-\xi_0|$ (при малом τ). Но тогда, по лемме 3, в сферическом слое $^1/_2|\eta_n-\xi_0|\leqslant\leqslant|\zeta-\eta_n|\leqslant|\eta_n-\xi_0|$ с центром в точке η_n значения этих полиномов различаются в некоторой точке ζ не меньше, чем на $\frac{\delta}{2}|\eta_n-\xi_0|\times\times|\eta_n-\xi_0|^r C_{n,r,s}$, где $C_{n,r,s}>0$ — константа и $r\leqslant n-2$, т. е. значения этих двух полиномов различаются не менее, чем на $K|\eta-\xi_0|^{r+1}$, где K — положительная константа и $r+1\leqslant m-1$. С другой стороны, значение $F(\zeta)$ заключено в интервалах $I_1=[P_0(\zeta)-\varepsilon|\zeta-\xi_0|^m, P_0(\zeta)++\varepsilon|\zeta-\xi_0|^m]$ и $I_2=[P_n(\zeta)-\varepsilon|\zeta-\eta_n|^m, P_n(\zeta)+\varepsilon|\zeta-\eta_n|^m]$ и, так как $|\zeta-\xi_0|\leqslant 2|\zeta-\eta_n|$, а $P_0(\eta_n)=P_n^0(\eta_n)$, то при достаточно малых $|\eta_n-\xi_0|$ интервалы I_1 и I_2 не пересекаются. Отсюда следует сильная дифференцируемость функции $F(\xi)$ по множеству $D(\varepsilon,\rho)$ и, согласно лемме 2, доказательство леммы 4.

Теорема 1 (основная). *Пусть $F(\xi)$ — действительная функция, заданная в n-мерном кубе L и дифференцируемая (в обычном смысле) n раз в каждой точке $\xi\subset L$. Пусть Ω — множество точек, в которых все первые частные производные $F(\xi)$ равны нулю. Тогда мера Ω по t, где $t(\xi)=F(\xi)$, равна нулю.*

Доказательство. Для $n=1$ теорема тривиально следует из теоремы Vitali о покрытии. Пусть теорема 1 доказана для всех $n<N$. Докажем ее для $n=N$.

Пусть $\tilde{\Omega}_s$ — множество точек $\xi\subset L$, в которых все частные производные функции F до s-го порядка включительно равны нулю, и $\Omega_s=\tilde{\Omega}_s-\tilde{\Omega}_{s+1}$. Пусть теорема 1 неверна. Найдется минимальное s такое, что мера Ω_s по t положительна.

Пусть $s<n-1$. Число частных производных порядка $s+1$ конечно, и поэтому найдется такое l, что множество точек Ω_s^*, в которых $\partial^{s+1}F(\xi)/\partial x_l^{s+1}\neq 0$, имеет положительную меру по t. Пусть $\varphi(\xi)==\partial^s F(\xi)/\partial x_l^s$. В точках $\xi\subset\Omega_s^*$ имеем $\operatorname{grad}\varphi(\xi)\neq 0$, и потому, по теореме Young'а, в окрестности каждой точки $\xi\subset\Omega_s^*$ множество $U\{\xi,\varphi(\xi)=0\}$ есть $n-1$-мерная поверхность, дифференцируемая по крайней мере $n-s$ раз, и $\Omega_s^*\subset U$.

Найдется такая точка $\xi\subset\Omega_s^*$ и столь малая ее окрестность V, что после соответствующей замены координат поверхность U в этой окрестности V выразится как $x_n=\Phi(x_1,\ldots,x_{n-1})$, где $\Phi(x_1,\ldots,x_{n-1})$ — $n-s$ раз дифференцируемая функция и в то же время мера $U\cdot V\cdot\Omega_s^*$ по t положительна. Тогда, по лемме 1, функция $F(x_1,\ldots,x_{n-1})=F[x_1,\ldots,x_{n-1}, \Phi(x_1,\ldots,x_{n-1})]$ в каждой точке $\eta(x_1,\ldots,x_{n-1})$ при $\eta[x_1,\ldots,x_{n-1},\Phi(x_1,\ldots,x_{n-1})]\subset\Omega_s^*\cdot U\cdot V$ слабо дифференцируема до порядка n. Далее, множество $\overline{\Omega}$ — проекция множества $\Omega_s^*\cdot U\cdot V$ в пространство $x_1,\ldots,x_{n-1}$ — имеет по t ту же меру, что и $\Omega_s^*\cdot U\cdot V$. Наконец, согласно лемме 4 и теореме Whitney, найдется функция $\tilde{F}(x_1,\ldots,x_{n-1})$, дифференцируемая до $n-1$-го порядка включительно, причем в точках множества E положительной меры по t (где $t(\xi)=\tilde{F}(\xi)$) ее первые частные производные все равны нулю, что противоречит предложению индукции.

При $s=n$ мы сразу приходим к противоречию, применяя теорему Vitali.

Пусть $s=n-1$. Тогда для каждой неизолированной точки $\xi \subset \Omega_s$ найдется направление $l(\xi)$ такое, что $\partial^n F(\xi)/\partial l(\xi)^n = 0$.

Назовем n-мерным гироидом сумму $n-1$-мерного шара и ортогонального ему отрезка (ось гироида) с серединой в центре шара. Объемом гироида назовем произведение $n-1$-мерного объема шара на длину оси. Легко показать, что сумма объемов равных непересекающихся n-мерных гироидов, лежащих в кубе объема V, не превышает $K_n V$, где K_n—константа, зависящая от n.

Пусть теперь мера Ω_s по t равна $\mu > 0$ и объем куба задания L есть V. Можно выбрать не содержащее изолированных точек множество $\Omega^* \subset \Omega$ и числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ так, чтобы мера Ω^* по t превышала $\mu/2$, верхняя грань n-х частных производных $F(\xi)$ в каждой точке $\xi \subset \Omega^*$ не превышала некоторого M и, наконец, при $|\eta - \xi| \leqslant \delta$ имело место: a) $|F(\eta) - F(\xi)| \leqslant 2M|\eta - \xi|^n$ и b) $|F(\eta) - F(\xi)| \leqslant \varepsilon|\eta - \xi|^n$, если η лежит на прямой $l(\xi)$.

Каждой точке $\xi \subset \Omega^*$ мы отнесем гироид с центром в ξ, длиной оси δ и радиусом шара $\sqrt[n]{\varepsilon/2M}\,\delta$. Тогда на каждом таком гироиде колебание функции $F(\xi)$ не превысит $\varepsilon\delta^n$, а объем гироида будет $T(\varepsilon/2M)^{\frac{n-1}{n}}\delta_n$. Здесь T — объем единичного $n-1$-мерного шара. Относя каждому гироиду на оси t интервал колебания функции F на этом гироиде и выбирая из полученных интервалов неперекрывающиеся с суммой длин не меньше $\mu/6$, мы получим при $\varepsilon < T^n \mu^n (2M)^{1-n} (6K_n V)^{-n}$ конечное число неперекрывающихся равных гироидов с суммой объемов больше $K_n V$, что невозможно. Теорема 1 полностью доказана.

Из теоремы 1 и теоремы Young'а о поведении множества уровня в окрестности точки, где градиент отличен от нуля, следует

Теорема 2. *Пусть $F(\xi)$ — n раз дифференцируемая функция n переменных, заданная в кубе. Тогда почти все множества уровня E_t состоят каждое из конечного числа n раз дифференцируемых в каждой точке многообразий без края или с краем на границе куба определения.*

Имеет место

Теорема 3. *Пусть $F(\xi)$ — $n-1$ раз дифференцируемая функция, заданная в n-мерном кубе. Тогда почти все множества уровня E_t содержат лишь локально-связные компоненты.*

Для каждого $n > 2$ существует $n-1$ раз непрерывно дифференцируемая функция n переменных, содержащая на каждом уровне бесконечное число компонент-немногообразий. Случай $n=2$ исключителен (см. ([2])); однократная дифференцируемость в этом случае уже влечет для компонент множеств уровня свойство быть многообразиями, хотя не обязательно дифференцируемыми и одномерными.

Для каждого $n > 1$ существует $n-2$ раза непрерывно дифференцируемая функция n переменных, содержащая на каждом уровне не локально-связную компоненту.

Поступило
7 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Whitney, Trans. Am. Math. Soc., 36, № 1 (1934). [2] Г. М. Адельсон-Вельский и А. С. Кронрод, ДАН, 49, № 4 (1945).