Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

П. П. КОРОВКИН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ Д. Ф. ЕГОРОВА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 VII 1947)

Задачей настоящей заметки является указание на то обстоятельство, что доказательство известной теоремы Д. Ф. Егорова о равномерной сходимости последовательности функций опирается далеко не на все обычно принимаемые свойства меры. Устанавливаемое далее обобщение теоремы Егорова применимо, в частности, к случаю, когда в качестве меры берется „емкость" плоского множества, которая, как известно, не обладает свойством аддитивности (и поэтому не может рассматриваться как мера в обычном смысле этого слова).

От класса $\mathfrak{M}_\alpha$ множеств, которые мы будем называть α-измеримыми, мы будем требовать только следующее:

1. Пересечение конечного или счетного множества множеств из $\mathfrak{M}_\alpha$ принадлежит $\mathfrak{M}_\alpha$.

От определенной на $\mathfrak{M}_\alpha$ функции множества $\alpha(M)$, называемой далее α-мерой, требуется:

2. Для любого M из $\mathfrak{M}_\alpha$ значение $\alpha(M)$ есть неотрицательное число.
3. Если $M_1 \subset M_2$ и множества M_1 и M_2 входят в $\mathfrak{M}_\alpha$, то

$$\alpha(M_1) \leqslant \alpha(M_2).$$

4. Если $M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_n \supset \ldots$ и множества M_n входят в $\mathfrak{M}_\alpha$, то

$$\alpha\left(\prod_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \lim_{n\to\infty} \alpha(M_n).$$

5. Если $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$ и множества M_n и $M' = \sum_{=1}^{\infty} M_n$ входят в $\mathfrak{M}_\alpha$, то

$$\alpha(M') = \lim_{n\to\infty} \alpha(M_n).$$

Действительную функцию $f(x)$, определенную на множестве M из $\mathfrak{M}_\alpha$, будем называть α-измеримой, если для всякого a множества $E\{f(x) \leqslant a\}$ и $E\{f(x) \geqslant a\}$ тех точек из M, на которых $f(x)$, соответственно, меньше или равно a и больше или равно a, входят в $\mathfrak{M}_\alpha$.

Теорема 1. *Если на множестве M из $\mathfrak{M}_\alpha$ последовательность действительных функций $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ и функции $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$ α-измеримы, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое α-измеримое множество $M' \subseteq M$, что*

$$\alpha(M') > \alpha(M) - \varepsilon,$$

и на котором сходимость будет равномерной.

Доказательство. Пусть $E_n^{(1)}$ — множество тех x, для которых $|g_n(x)| \leqslant 1$ и $M_n^{(1)} = E_n^{(1)} E_{n+1}^{(1)} E_{n+2}^{(1)} \ldots$

Множества $M_n^{(1)}$ α-измеримы в силу условия 1. Так как

$$M = M_1^{(1)} + M_2^{(1)} + \ldots,$$

то, в силу условия 5,

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(M_n^{(1)}) = \alpha(M).$$

Выберем n_1 так, чтобы

$$\alpha(M_{n_1}^{(1)}) > \alpha(M) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Подобным же образом строим множества $M_n^{(2)}$ тех x, для которых неравенства $|g_k(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ ($x \in M_{n_1}^{(1)}$ имеют место для всех $k \geqslant n$). Выберем множество $M_{n_2}^{(2)}$ так, чтобы

$$\alpha(M_{n_2}^{(2)}) > \alpha(M_{n_1}^{(1)}) - \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Продолжая этот процесс, мы найдем последовательность множеств $M_{n_1}^{(1)} \supset M_{n_2}^{(2)} \supset M_{n_3}^{(3)} \supset \ldots$ таких, что

$$\alpha(M_{n_s}^{(s)}) > \alpha(M) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2^s},$$

и неравенства $|g_k(x)| \leqslant 1/s$ имеют место на множестве $M_{n_s}^{(s)}$, если $k \geqslant n_s$.

Пусть $M' = \prod_{s=1}^{\infty} M_{n_s}^{(s)}$. В силу условия 4 имеем:

$$\alpha(M') = \lim_{s \to \infty} \alpha(M_{n_s}^{(s)}) \geqslant \alpha(M) - \varepsilon.$$

Покажем, что на множестве M' последовательность $g_n(x)$ сходится к нулю равномерно. Действительно, пусть $\delta > 0$ и $1/s < \delta$. Из предыдущего следует:

$$|g_k(x)| \leqslant \frac{1}{s} < \delta \text{ при } k \geqslant n_s \text{ и } x \in M_{n_s}^{(s)}.$$

В силу произвольности δ и того, что $M' \subset M_{n_s}^{(s)}$, теорема доказана.

Замечание. Условия теоремы выполнены, если функции $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ α-измеримы и если с измеримостью двух функций измерима и их сумма.

Пусть F — ограниченное замкнутое множество плоскости комплексного переменного z и $T_n(z; F)$ — полиномы Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля на множестве F.

Пусть

$$m_n(F) = \max_{z \in F} |T_n(z; F)|.$$

Известно, что существует предел τ последовательности чисел $\sqrt[n]{m_n(F)}$, который называют емкостью множества F. Непосредственно из определения емкости следует, что для τ и указанных множеств условия 1—4 выполнены. Нетрудно доказывается и условие 5.

Если $f(z)$ — непрерывная функция на множестве F, то множества $E\{|f(z)| \leqslant a\}$ замкнуты. В силу этого справедлива

Теорема 2. *Если последовательность непрерывных функций сходится к нулю на ограниченном замкнутом множестве F, то при любом заданном положительном ε можно указать замкнутое множество $F' \subset F$, $\tau(F') > \tau(F) - \varepsilon$, сходимость на котором будет равномерной.*

Если F — неограниченное замкнутое множество плоскости z, то полагаем

$$\tau(F) = \lim_{r \to \infty} \tau(F_r),$$

где F_r — общая часть множества F и круга $|z| \leqslant r$.

Пусть E — произвольное множество плоскости z. Полагаем:

$$\tau_*(E) = \sup_{F \subset E} \tau(F); \quad \tau^*(E) = \tau(\overline{E}),$$

где $\overline{E}$ — замыкание E.

Если $\tau_*(E) = \tau^*(E)$, то множество E назовем τ-измеримым.

Пусть F_n — ограниченные замкнутые множества.

Легко доказывается

Теорема 3. *Если $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$, $F_\sigma = F_1 + F_2 + \ldots$, то*

$$\tau_*(F_\sigma) = \lim_{n \to \infty} \tau(F_n).$$

Будем говорить, что точка z лежит вне ограниченного множества E, если она лежит в той из областей, дополнительных к замкнутому множеству $\overline{E}$, которая содержит бесконечно далекую точку. Назовем σ-множеством конечную или счетную сумму замкнутых множеств емкости нуль.

Теорема 4. *Если $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$, $F_\sigma = F_1 + F_2 + \ldots$, если существует τ-измеримое ограниченное множество E, $\tau(E) = \lim_{n \to \infty} \tau(F_n)$, то множество точек F_σ, лежащих вне E, есть σ-множество.*

Заметим еще, что если $\tau(F_1) = 0$ и $F_2 = F + F_1$, то $\tau(F_2) = \tau(F)$.

Теоремами 2, 4 и последним замечанием мы воспользуемся в следующей статье.

Поступило
16 VII 1947