Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

Н. И. КОВАНЦОВ

О ПОВЕРХНОСТЯХ, У КОТОРЫХ ПРЯМАЯ КАНОНИЧЕСКОГО ПУЧКА В КАЖДОЙ ТОЧКЕ СОВПАДАЕТ С МЕТРИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬЮ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 VII 1947)

Пусть S—поверхность, отнесенная к параметрам u, v асимптотических линий, для которых

$$ds^2 = A^2du^2 + 2AC\cos\omega\, du dv + C^2du^2, \quad 2D' du dv$$

две квадратичные формы. Примем за оси координат касательные к асимптотическим и нормаль в точке M_0.

1. Директрисами Вильчинского называются две директрисы линейной конгруенции, получаемой пересечением двух линейных комплексов, соприкасающихся с асимптотическими, соответственно, $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$.

Если

$$a_{ik}p^{ik} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3, 4 \tag{a}$$

есть уравнение рассматриваемого комплекса, то вносим сюда последовательные производные от плюккеровых координат p^{ik} касательных к асимптотическим, вычисленные с помощью формул Гаусса—Вейнгартена. Требуя, чтобы уравнение (a) удовлетворялось координатами касательной в точке $u+du$, v (соответственно, u, $v+dv$) до бесконечно малых 4-го порядка, приходим к направляющим параметрам первой директрисы:

$$l = \frac{A}{2D'}\left(2b - a' - \frac{\partial \ln c}{\partial v}\right), \quad m = \frac{C}{2D'}\left(2b' - a - \frac{\partial \ln c'}{\partial u}\right), \quad n = 1,$$

где $a = G_{11}^1$, $b = G_{12}^1$, $c = G_{11}^2$ и т. д.— скобки Кристоффеля для линейного элемента.

2. Ребро Грина. Уравнение S в окрестности M_0 имеет форму:

$$z = a_{11}xy + \frac{1}{3!}(a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \ldots,$$

где

$$a_{11} = \frac{D'}{AC}, \quad a_{21} = -\frac{2b'D'}{A^2C}, \quad a_{12} = -\frac{2bD'}{C^2A}.$$

Пучок поверхностей 2-го порядка Дарбу в точке M_0 поверхности S определяется уравнением:

$$a_{11}xy-z+\frac{a_{12}}{2a_{11}}xz+\frac{a_{12}}{2a_{11}}yz+\nu z^2=0,$$

где ν есть параметр пучка. Проектируя асимптотическую $v=\mathrm{const}$ на плоскость xy параллельно вектору $\{l_1, m_1, n_1\}$, получим пучок кривых второго порядка, имеющих с проекцией касание третьего порядка:

$$3\frac{cC}{A^2}x^2+2\,\frac{\left(\frac{\partial \ln c}{\partial u}+b'-2a\right)C-m_1D'}{AC}\,xy+ry^2-6y=0, \qquad \text{(b)}$$

где r — параметр пучка.

Полюс $P_1(x_1, 0)$ касательной $x=z=0$ относительно кривых 2-го порядка (b) имеет координаты:

$$3ACx_1^{-1}=\left(\frac{\partial \ln c}{\partial u}+b'-2a\right)C-m_1D', \quad y_1=0.$$

Таким же образом находим полюс $P_2(0, y_2)$ для прямой $y=z=0$. Если прямая, проходящая через M_0 параллельно вектору $\{l_1, m_1, n_1\}$, сопряжена прямой P_1P_2 относительно пучка поверхностей 2-го порядка Дарбу, то параметры

$$l_1=\frac{A}{4D'}\left(\frac{\partial \ln c'}{\partial v}+4b-2a'\right), \quad m_1=\frac{C}{4D'}\left(\frac{\partial \ln c}{\partial u}4b'-2a\right), \quad n_1=1$$

определяют ребро Грина.

3. Произвольная прямая канонического пучка определяется направляющими параметрами

$$L=\lambda l_1+l(1-\lambda), \quad M=\lambda m_1+m(1-\lambda), \quad N=1,$$

где $\lambda=\mathrm{const}$ — параметр пучка.

Прямая λ пучка совпадает с метрической нормалью $x=y=0$, если $L=M=0$ или

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\frac{\partial \ln c'}{\partial v}-2(1-\lambda)\frac{\partial \ln c}{\partial v}-2(a'-2b)=0,\\ &\lambda\frac{\partial \ln c}{\partial u}-2(1-\lambda)\frac{\partial \ln c'}{\partial u}-2(a-2b')=0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

откуда следует

$$(2-\lambda)\left(\frac{\partial^2 \ln c}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 \ln c'}{\partial u\partial v}\right)=0.$$

Если $\lambda=2$, прямая становится нормалью Фубини. Оставляя этот случай в стороне, получим при подходящем выборе параметров u, v

$$c=c'.$$

Уравнения (1) и фундаментальные уравнения Гаусса и Кодацци принимают вид системы:

$$A_v=Ab+Cb'\cos\omega, \quad A_u=Aa+Cc\cos\omega,$$

$$C_v=Ca'+Ac\cos\omega, \quad C_u=Cb'+Ab\cos\omega,$$

$$\omega_v = -\sin\omega\left(c\frac{A}{C} + b'\frac{C}{A}\right), \quad \omega_u = -\sin\omega\left(c\frac{C}{A} + b\frac{A}{C}\right),$$

$$D'_v = (a' - b)D', \quad D'_u = (a - b')D',$$

$$c_v = (2b - a')c + \lambda'(2b - a')c, \quad c_u = (2b' - a)c + \lambda'(2b' - a)c$$

$$\left(\lambda' = \frac{3\lambda}{2 - 3\lambda}\right),$$

$$b_v = \frac{D'^2}{A^2\sin^2\omega} + (1 + 2\lambda')b'c - \lambda' ac + a'b - b^2, \quad b_u = \eta,$$

$$b'_v = \eta, \quad b'_u = \frac{D'^2}{C^2\sin^2\omega} + (1 + 2\lambda')bc - \lambda' a'c + ab' - b'^2,$$

$$a_v = \eta + bb' - c^2 + \frac{D'^2\cos\omega}{AC\sin^2\omega}, \quad a'_u = \eta + bb' - c^2 + \frac{D'^2\cos\omega}{AC\sin^2\omega}.$$

4. Система не полна. Дифференцируя и исключая производные, можно показать, что рассматриваемые поверхности зависят лишь от произвольных постоянных.

Если искать $A = C$, ω, D', $a = a'$, $b = b'$, c как функции одного аргумента $u + v$, то получается частное решение, зависящее от 5 произвольных постоянных.

5. Если $\lambda' = 0$, каноническая прямая становится директрисой Вильчинского и система становится полной при присоединении двух уравнений

$$\eta_v = -\frac{2b'D'^2}{A^2\sin^2\omega} + \frac{cD'^2}{C^2\sin^2\omega} + \frac{3bD'^2\cos\omega}{AC\sin^2\omega} + b'^2c + b'b^2 + a'\eta - b\eta,$$

$$\eta_u = -\frac{2bD'^2}{C^2\sin^2\omega} + \frac{cD'^2}{A^2\sin^2\omega} + \frac{3b'D'^2\cos\omega}{AC\sin^2\omega} + b^2c + bb'^2 + a\eta - b'\eta.$$

Общий интеграл зависит от двух функций одного аргумента.

Уравнения (1) допускают теперь геометрическое истолкование. Кручение $1/r$ асимптотических и их кривизны $1/\rho_1$, $1/\rho_2$ удовлетворяют уравнению

$$\sqrt[3]{\rho_2}\;\rho_{1v} r_v = \sqrt[3]{\rho_1}\;\rho_{2u} r_u.$$

6. Для нормали Фубини $\lambda = 2$ уравнения (1) становятся следующими:

$$\frac{\partial \ln cc'}{\partial u} = a - 2b', \quad \frac{\partial \ln cc'}{\partial v} = a' - 2b.$$

Следовательно

$$cc' = k\sqrt{\frac{D'^3}{AC\sin\omega}}, \quad k = \text{const}.$$

Общая поверхность зависит от 6 произвольных функций одного аргумента.

Поступило
3 VII 1947