Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

О. Н. ГОЛОВИН

ОБ АССОЦИАТИВНЫХ ОПЕРАЦИЯХ НА МНОЖЕСТВЕ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 23 VI 1947)

Основным результатом настоящей работы является построение счетной серии алгебраических операций на множестве групп, обладающих основными свойствами, присущими операциям свободного и прямого умножения групп. Тем самым дается положительный ответ на вопрос, поставленный А. Г. Курошем (1), о существовании такого рода операций.

§ 1. Следуя Холлу (2), будем через $(A,B)_G$ или (A, B) обозначать коммутант подгрупп A и B группы G, т. е. подгруппу, порожденную коммутаторами $(a, b)=a^{-1}b^{-1}ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Через $\bar{A}$ будет обозначаться нормальный делитель, порожденный подгруппой A в группе G.

Определение 1. Если группа G порождается своими подгруппами A и B, причем $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = 1$, то мы будем говорить, что G является правильным произведением $A \triangle B$ подгрупп A и B или что G правильно порождается подгруппами A и B (правильными множителями группы G).

Примерами правильных произведений могут служить прямые и свободные произведения.

Теорема 1. *Если $G = A \triangle B$ и один из множителей A или B является нормальным делителем в G, то и второй множитель — нормальный делитель, а G — прямое произведение подгрупп A и B.*

Теорема 2. *Если $G = A \triangle B$, то каждый элемент g из G имеет однозначно определенную „правильную" запись $g=abu$, где $a \in A$, $b \in B$, $u \in (A, B)$, причем „правильные" компоненты a, b остаются неизменными и при другом порядке следования компонент в записи элемента. Обратно, если группа G обладает такими подгруппами A и B, что каждый ее элемент g имеет однозначно определенную запись вида $g=abu$, то $G = A \triangle B$.*

Отметим, что при перемножении двух элементов перемножаются и их одноименные правильные компоненты, а у обратного элемента правильные компоненты обратны.

Определение 2. Гомоморфное отображение правильного произведения $A \triangle B$, ядро гомоморфизма которого заключено в (A, B), называется правильным гомоморфизмом.

Теорема 3. *Каждое правильное произведение $A \triangle B$ является правильной фактор-группой свободного произведения $A * B$ тех же групп. Обратно, каждая правильная фактор-группа свободного произведения $A * B$ является правильным произведением тех же групп.*

Определение 3. Ядро правильного гомоморфизма между $A * B$ и $A \triangle B$ называется **определяющим ядром** для правильного произведения $A \triangle B$.

Из теоремы 3 следует, что множество всех правильных произведений двух данных групп A и B представляет собою дедекиндову структуру, нулем которой является свободное произведение $A * B$, а единицей — прямое произведение $A \times B$.

§ 2. **Определение 4.** Условимся говорить, что на множестве групп A_α задано **вполне правильное $\triangle$-умножение**, если удовлетворяются следующие требования:

a) каждой паре групп A_α, A_β, взятых в данном порядке, поставлена в соответствие некоторая третья группа $A_\alpha \triangle A_\beta$;

b) группа $A_\alpha \triangle A_\beta$ является правильным произведением двух своих подгрупп, соответственно изоморфных A_α и A_β (**правильность $\triangle$-умножения**);

c) $A_\alpha \triangle A_\beta = A_\beta \triangle A_\alpha$ (**коммутативность $\triangle$-умножения**);

d) $(A_\alpha \triangle A_\beta) \triangle A_\gamma = A_\alpha \triangle (A_\beta \triangle A_\gamma)$ (**ассоциативность $\triangle$-умножения**).

Очевидно, свободное и прямое умножения групп являются вполне правильными. Ниже приводится построение счетной серии вполне правильных операций. Опираясь на результаты § 1, естественно пытаться разрешить эту проблему путем разумного подбора системы определяющих ядер для каждой пары рассматриваемых групп. При этом, в то время как требованию c) удовлетворить нетрудно, тонким вопросом остается требование ассоциативности умножения.

По Р. Бэру ([3]), минимальным центральным рядом группы H, начинающимся с нормального делителя N, называется убывающий ряд нормальных делителей, члены которого определяются рекуррентными формулами ${}_0N = N$, ${}_kN = (H, {}_{k-1}N)$ для $k > 0$.

Определение 5. Для двух произвольных групп A и B члены минимального центрального ряда их свободного произведения $F = A * B$, начинающегося с $(A, B)_F$, называем свободными коммутантами групп A и B, а именно, k-й член ${}_k(A, B)_F$ — **k-м свободным коммутантом**.

Определение 6. **k-м центральным произведением групп** A и B называем фактор-группу их свободного произведения по k-му свободному коммутанту:

$$A\,(k)\,B = (A * B)/{}_k(A, B)_F.$$

Коммутант $(A, B)_Z^{(k)}$ групп A и B в $A\,(k)\,B$ называем **k-м центральным коммутантом** групп A и B. Очевидно, $(A, B)_Z^{(k)} = (A, B)_F/{}_k(A, B)_F$.

Введенное в начале § 1 понятие коммутанта двух подгрупп группы G естественным образом обобщается на случай произвольного множества подгрупп A_α, $\alpha \in \mathfrak{M}$. Под **коммутантом** $(A_\alpha)_\mathfrak{M}$ **множества подгрупп** A_α мы будем понимать подгруппу группы G, порожденную всеми коммутаторами вида (a_α, a_β), $\alpha \neq \beta$. В частности, коммутант трех подгрупп A, B, C будет равен $(A, B, C) = \{(A, B), (B, C), (C, A)\}$. Однако, в то время как в случае двух подгрупп из равенства $G = \{A, B\}$, т. е. из того, что группа G порождается своими подгруппами A и B, следовало, что $(A, B)_G$ есть нормальный делитель в G (чем мы и пользовались в определении 5), для трех и более подгрупп это уже неверно. Все же и в этом случае из $G = \{A, B, C\}$ следует, что $(G, (A, B, C)) = (G, \overline{(A, B, C)})$. Поэтому имеет смысл запись

${}_k(A, B, C)_G$, если только условиться, что ${}_0(A, B, C)_G = \overline{(A, B, C)}_G$. Оказывается, что ${}_k(A, B, C)_G \doteq {}_k(\bar{A}, \bar{B})_G \cdot {}_k(\overline{AB}, \bar{C})_G$, исходя из чего удается доказать следующую важную теорему:

Теорема 4. *Для произвольных групп A, B, C имеет место изоморфизм*

$$(A\,(k)\,B)\,(k)\,C \cong (A * B * C)/{}_k(A, B, C)_F,$$

где $F = A * B * C$.

Очевидным следствием теоремы 4 является

Теорема 5. *k-е центральное умножение групп для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ представляет собой вполне правильную операцию.*

Действительно, из теоремы 4 следует, что k-е центральное умножение ассоциативно: $(A\,(k)\,B)\,(k)\,C = A\,(k)\,(B\,(k)\,C)$.

Нулевым центральным умножением, очевидно, является прямое умножение групп. Первое центральное произведение двух групп впервые было определено и в какой-то мере изучено Ф. Леви ([4]) под названием S-произведения. К сожалению, с содержанием работы Ф. Леви мне удалось познакомиться лишь по ее реферату в Math. Reviews ([5]). Не имея возможности в настоящей статье излагать подробно свойства 1-го центрального произведения, остановлюсь для примера лишь на трех его свойствах (второе из которых известно было уже и Ф. Леви ([5])):

1. $(A, B)_Z^{(1)} \simeq (A/(A, A), B/(B, B))_Z^{(1)}$.

2. $(A_1 \times A_2, B)_Z^{(1)} = (A_1, B)_Z^{(1)} \times (A_2, B)_Z^{(1)}$.

3. Если A и B — конечные группы взаимно простых порядков, то $(A, B)_Z^{(1)} = 1$.

Поскольку 1-е центральное произведение двух групп A и B вполне определяется структурой 1-го центрального коммутанта $(A, B)_Z^{(1)}$, то свойства 1—3 позволяют утверждать по крайней мере теоретическую возможность конструктивного построения центрального произведения двух любых конечных групп, ибо: свойство 1 позволяет все свести на абелев случай; свойство 2 приводит к рассмотрению одних лишь циклических p-групп; свойство 3 означает, что 1-е центральное произведение двух p-групп по различным простым числам вырождается в прямое произведение; произведение же двух циклических p-групп по одному p удается фактически построить.

Необходимо отметить, что из ряда теорем, доказанных Р. Бэром в ([3]), непосредственно следует, что многие свойства прямого произведения групп переносятся и на все центральные произведения. Так, например, центральные произведения двух или произвольного множества (см. ниже § 3) локально-конечных групп будут локально-конечны, произведения p-групп будут p-группами.

§ 3. Теорема 5 позволяет говорить о центральных произведениях любого конечного числа групп. Поскольку же теорему 4 удается распространить на случай произвольного конечного числа групп, то мы имеем право определить и непосредственно k-е центральное произведение групп $A_1, A_2, \ldots, A_n$ как фактор-группу $F/{}_k(A_1, A_2, \ldots, A_n)_F$, где $F = A_1 * A_2 * \ldots * A_n$. Наконец, мы можем говорить о центральных произведениях и любого множества групп.

Определение 7. Пусть задано произвольное множество групп A_α, $\alpha \in \mathfrak{M}$, и пусть $F = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}}^{*} A_\alpha$ есть их свободное произведение. Тогда фактор-группу $F/{}_k((A_\alpha)_{\mathfrak{M}})_F$ называем *k-м центральным произведением* $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}}^{(k)} A_\alpha$ групп A_α.

С помощью трансфинитной индукции удается доказать ассоциативность центральных умножений групп в следующем, наиболее общем виде:

Теорема 6. *Если задано произвольное множество групп A_α, $\alpha \in \mathfrak{M}$, и множество индексов $\mathfrak{M}$ каким-то образом разбито на теоретико-множественную сумму $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathfrak{M}_\omega$ попарно непересекающихся подмножеств $\mathfrak{M}_\omega$, то*

$$\prod_{\in \mathfrak{M}}^{(k)} A_\alpha = \prod_{\omega \in \Omega}^{(k)} \Big(\prod_{\alpha \in \mathfrak{M}_\omega}^{(k)} A_\alpha \Big).$$

Научно-исследовательский
институт математики
Московского государственного университета

Поступило
23 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош, Теория групп, 1944, стр. 351. [2] P. Hall, Proc. London Math. Soc., **36**, 29 (1934). [3] R. Baer, Trans. Amer. Math. Soc., **58**, 3, 348 (1945). [4] F. W. Levi, J. Indian Math. Soc. (N. S.), **8**, 78 (1944). [5] Math. Rev., **7** : 3, 113 (1946).