Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

И. И. ГИХМАН

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ ОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 V 1947)

Пусть P — функция множеств, определенная на некотором борелевском теле подмножеств Γ^c и образующая вместе с этим телом поле вероятностей в смысле Колмогорова.

Если Γ^c есть некоторое множество функций $\alpha(t, x)$, определенных для всех точек t полуоси неотрицательных вещественных чисел и всех x из пространства Φ, принимающих значения α из пространства Γ, то поле вероятностей $\{\Gamma^c, P\}$ будем называть случайным процессом.

В дальнейшем предполагаем, что Φ и Γ являются изоморфными гильбертовыми пространствами. Если f — некоторая P-измеримая на Γ^c функция, то через Ef обозначим математическое ожидание f и через $E\,\{\beta(s, y)\,|_{t'}^{t''}; f\}$ — условное математическое ожидание функции f при гипотезе, что $\alpha(t, x)$ на сегменте $[t', t'']$ есть заданная функция $\beta(s, y)$. Обозначим через H гильбертово пространство функций $f[\alpha(t, x)]$ со значениями в Φ, P-измеримых на Γ^c и удовлетворяющих условию $\|f\|_H = E\,\|f[\alpha(t, x)]\|^2 < \infty$.

Пусть $\Lambda^{(n)}$ произвольное борелевское множество в Γ^n (Γ^n — n-я топологическая степень пространства Γ). Множество всех функций $\alpha(t, x) \in \Gamma^c$, удовлетворяющих соотношениям $\{\alpha(t_1, x_1) - \alpha(t_0, x_1), \ldots$ $\ldots, \alpha(t_n, x_n) - \alpha(t_{n-1}, x_n)\} \in \Lambda^{(n)}$, где $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, назовем дифференциальным цилиндрическим множеством ([3]).

Случайный процесс будем называть процессом класса D, если борелевское тело P-измеримых множеств содержит все дифференциальные цилиндрические множества.

Прежде всего рассматривается следующий вопрос: существует ли для заданного случайного процесса $\{\Gamma^c, P\}$ класса D функция $x(t) = S\,[\tau, \xi\,|\,\alpha(s, y), t]$ из H, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{gathered} x(\tau) = \xi, \quad \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E\,\|\,x(t+\Delta) - x(t) - \\ - [\alpha(t+\Delta, x(t)) - \alpha(t, x(t))]\,\|^2 = 0, \\ \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta^2} E\,\|\,E\,\{\beta(s, y)\,|_{\tau}^{t}; x(t+\Delta t) - x(t) - \\ - [\alpha(t+\Delta, x(t)) - \alpha(t, x(t))]\}\,\|^2 = 0. \end{gathered} \tag{A}$$

Сформулированный вопрос можно рассматривать как обобщение на случайные функции, вообще говоря не дифференцируемые, проблемы существования решений обычных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим сегмент $[\tau, T]$ и некоторые разложения этого сегмента на N сегментов посредством точек $\tau = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$.

Положим $t_{i+1} - t_i = \Delta_i$, $\max \Delta_i = |\sigma^N|$, $\alpha(t_{i+1}, x) - \alpha(t_i, x) = \delta_i \alpha(t, x)$.

Условия, накладываемые на случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$, при которых в настоящей работе решается поставленный вопрос, сводятся к следующим:

$$
\begin{gathered}
\| E\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1} | \delta_i \alpha(t, x) - \delta_i \alpha(t, y)\} \| \leqslant C\Delta_i \| x - y \|, \\
E\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1} | \| \delta_i \alpha(t, x) - \delta_i \alpha(t, y) \|^2\} \leqslant C\Delta_i \| x - y \|^2, \\
\| E\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1} | \delta_i \alpha(t, x)\} \| \leqslant K(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1})\Delta_i, \\
E\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1} | \| \delta_i \alpha(t, x) \|^2\} \leqslant K(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1})\Delta_i, \\
EK^2(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}) \leqslant C
\end{gathered}
\tag{B}
$$

для всех x и хотя бы одного y. Здесь $E\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1} | f\}$ обозначает условное математическое ожидание функции f при гипотезах $\delta_k \alpha(t, z) = \beta_k(z)$.

Для некоторого $\{\sigma^N\}$ определим на $[\tau, T]$ функцию $x^N(t)$, положив $x^N(\tau) = \xi$ и $x^N(t) - x^N(t_n) = \alpha(t, x^N(t_n)) - \alpha(t_n, x^N(t_n))$ при $t_n < t \leqslant t_{n+1}$. Определенная таким образом функция при любом t и ξ принадлежит H.

Если условия (B) выполнены, то имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *При фиксированных t и ξ функции $x^N(t)$ при $|\sigma^N| \to 0$ сходятся в H к предельной функции $X(t) = S(\tau, \xi | \alpha(s, y), t)$, не зависящей от выбора последовательности $\{\sigma^N\}$. Функция $X(t)$ удовлетворяет соотношениям* (A).

В частности, функция $X(t)$ измерима на $\{\Gamma^c, P\}$ в следующем смысле: каково бы ни было борелевское множество Ω в Φ и $\tau < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, множество всех $\alpha(s, y) \in \Gamma^c$, для которых $\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\} \in \Omega$, есть P-измеримое множество.

Теорема 2. *В H существует одна и только одна функция $x(t)$, удовлетворяющая соотношениям* (A).

Предположим теперь, что пространство Φ конечномерно и случайные функции $\alpha(t, x) \in \Gamma^c$ с вероятностью, равной 1, трижды дифференцируемы по x. Через $D^r(t, x)$ обозначим совокупность частных производных порядка r функций $\alpha(t, x)$ по x и через $\| D^r(t, x) \|^2$ — сумму квадратов этих частных производных.

Допустим, что случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$, кроме условий (B), удовлетворяет еще условиям

$$
\begin{gathered}
\| E\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1} | \delta_i D^r(t, x)\} \| \leqslant C\Delta_i, \\
E\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1} | \| \delta_i D^r(t, x) \|^k\} \leqslant C\Delta_i,
\end{gathered}
\tag{C}
$$

где $r = 1, 2, 3$; $k = 2, 4$. Тогда в H существуют функции $U_j(\xi, t)$, $U_{k,l}(\xi, t)$ со следующими свойствами: если $X(t)$, $Y(t)$ удовлетворяют условиям (A), $X(\tau) = \xi$, $Y(\tau) = \eta$, то

$$
E \| Y(t) - X(t) - \sum (\eta^r - \xi^r) U_r(\xi, t) \|^k \leqslant C(t - \tau) \| \eta - \xi \|^{2k}, \quad k = 2, 4,
$$

$$
E \| Y(t) - X(t) - \sum (\eta^r - \xi^r) U_r(\xi, t) -
$$

$$
- \frac{1}{2} \sum (\eta^r - \xi^r)(\eta^s - \xi^s) U_{rs}(\xi, t) \|^2 \leqslant C(t - \tau) \| \eta - \xi \|^6.
$$

Пусть $f(\xi)$ трижды дифференцируемая в Φ функция, ограниченная вместе со своими частными производными до третьего порядка включительно. На Γ^c рассмотрим P-измеримую функцию $f(X(t)) = f[S(\tau, \xi | \alpha(s, y), t)]$ и положим $F_t(\tau, \xi) = Ef(X(t))$.

Теорема 3. *Функция $F_t(\tau, \xi)$ дважды дифференцируема по ξ и при $t \to \tau$ $F_t(\tau, \xi) \to f(\xi)$ равномерно в каждой области $\|\xi\| < R$.*

Система функций $X(t) = S(0, \xi | \alpha(s, y), t)$ позволяет определить новый случайный процесс. Пусть $a = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ — произвольная возрастающая последовательность чисел из $[0, T]$ и Ω — произвольное борелевское множество в Φ^n.

$t_1 \neq 0$ положим:

$$\varphi_a(\xi, \Omega) = P[\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\} \in \Omega], \quad \overline{\Pi}_a(\Omega) = \int_\Phi \varphi_a(\xi, \Omega)\, m(d\xi),$$

где $m(A)$ — положительная вполне аддитивная функция множеств, определенная на теле борелевских множеств Φ, $m(\Phi) = 1$.

Если же $t_1 = 0$ и $\Omega = A_1 \times \Omega_1$, где A_1 и Ω_1 — борелевские множества, соответственно, из Φ и Φ^{n-1}, то положим $\overline{\Pi}_a(\Omega) = \int_A \varphi_{a'}(\xi, \Omega_1)\, m(d\xi)$,

где $a' = \{t_2, t_3, \ldots, t_n\}$.

Согласно одной теореме Колмогорова [1], функция $\overline{\Pi}_a(\Omega)$ может быть продолжена на некоторое борелевское тело $\overline{F}$ множеств из $\overline{\Phi}^c$, где $\overline{\Phi}^c$ — множество всех функций $x(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ со значениями в Φ.

Обозначим через Φ^c множество функций $x(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$, имеющих вид: $x(t) = S[0, \xi | \alpha(s, y), t]$. Тогда внешняя мера множества Φ^c, равна единице. На борелевском теле множеств Φ^c, представимых в виде $A = \Phi^c \cdot \overline{A}$, где $\overline{A} \in \overline{F}$, определим функцию множеств $\Pi(A)$, положив: $\Pi(A) = \overline{\Pi}(\overline{A})$ [3].

Множество Φ^c и функцию множеств $\Pi(A)$ можно рассматривать как некоторый случайный процесс $\{\Phi^c, \Pi\}$.

О случайном процессе $\{\Phi^c, \Pi\}$ будем говорить, что он индуцирован в пространстве Φ случайным процессом $\{\Gamma^c, P\}$.

Пусть λ — произвольное множество вещественных чисел. Каждому множеству A_λ функций $\alpha(t, x)$ со значениями в Γ, определенных на λ и на произвольном множестве из Φ, можно сопоставить цилиндрическое множество A функций из Γ^c, отождествляя A со множеством всех функций из Γ^c, совпадающих с одной из функций A_λ в области определения последней.

Пусть A_1 и A_2 — цилиндрические множества, определяемые множествами $A_{[\tau_1, \tau_2]}$, $A_{[\tau_3, \tau_4]}$, где $[\tau_1, \tau_2]$, $[\tau_3, \tau_4]$ — сегменты.

Случайный процесс класса D называется процессом класса W, если для любых P-измеримых множеств A_1, A_2 и для $\tau_1 < \tau_2 \leqslant \tau_3 < \tau_4$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2).$$

Нетрудно доказать: процесс $\{\Phi^c, \Pi\}$, индуцированный случайным процессом $\{\Gamma^c, P\}$ класса W, есть процесс Маркова.

В рассматриваемом случае ($\{\Gamma^c, P\}$ есть W-процесс) нетрудно проанализировать условия (B) и (C).

Пусть

$$E\{\alpha(t + \Delta, x) - \alpha(t, x)\} = A(t, \Delta, x)\Delta,$$

$$E\|\psi(t + \Delta, x) - \psi(t, x)\|^{2+\delta} \leqslant K(x)\Delta\varphi(\Delta),$$

$$\psi(t + \Delta, x) - \psi(t, x) = \alpha(t + \Delta, x) - \alpha(t, x) - A(t, \Delta, x)\Delta, \quad \delta > 0,$$

$$E[\psi^r(t + \Delta, x) - \psi^r(t, x)][\psi^s(t + \Delta, y) - \psi^s(t, y)] = B^{rs}(t, \Delta, x, y)\Delta,$$

где $\varphi(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$ и $A(t, \Delta, x)$, $B(t, \Delta, x)$ — непрерывные функции своих аргументов. Тогда $A(t, \Delta, x)\Delta = \int\limits_t^{t+\Delta} a(x, \tau)\, d\tau$, $B(t, \Delta, x, y)\Delta = \int\limits_t^{t+\Delta} b^{rs}(\tau, x, y)\, d\tau$ и условия (В) выполнены, если $a^r(\tau, x)$, $b^{rs}(\tau, x, y)$ имеют равномерно ограниченные частные производные по x, y. Если же функции $a^r(t, x)$ имеют частные производные до третьего порядка включительно, а $b^{rs}(t, x, y)$ частные производные вида $\frac{\partial^{2r} b(t, x, y)}{(\partial x^s)^r (\partial y^s)^r}$, $r = 1, 2, 3$, причем все они равномерно ограничены в Φ, то условия (С) также будут выполнены.

Теорема 4. *Если $f(\xi)$ — произвольная функция, равномерно ограниченная вместе со своими частными производными до третьего порядка включительно, и $\{\Gamma^c, P\}$ — W- процесс, удовлетворяющий* (В) *и* (С), *то функция $F(\tau, \xi) = Ef[S(\tau, \xi | \alpha(s, y), t)]$ удовлетворяет уравнению*

$$- \frac{\partial F(\tau, \xi)}{\partial \tau} = \sum a^r(\tau, \xi) \frac{\partial F(\tau, \xi)}{\partial \xi^r} + \frac{1}{2} \sum b^{rs}(\tau, \xi) \frac{\partial^2 F(\tau, \xi)}{\partial \xi^r \partial \xi^s}, \; b^{rs}(\tau, \xi) = b^{rs}(\tau, \xi, \xi),$$

(так называемому первому уравнению Колмогорова [2]).

На основании теоремы 3 при $\tau \to t$ $F(\tau, \xi) \to f(\xi)$ равномерно при $\|\xi\| < R$.

При доказательстве теоремы 4 не используются теоремы существования решений граничных задач параболических дифференциальных уравнений.

Поступило
27 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, 1936. [2] А. Н. Колмогоров, Усп. математ. наук, 5 (1938). [3] J. Doob, Trans. Am. Math. Soc., 42, № 1 (1937).