Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 VI 1947)

В предыдущей заметке (1) нами было приведено ортогональное разложение гильбертова пространства, соответствующее трем основным краевым задачам для линейных эллиптических уравнений второго порядка. Аналогичные ортогональные разложения получены автором для общего самосопряженного эллиптического уравнения порядка $2m$ $L(u)=0$ (2).

В настоящей заметке мы ограничимся изложением полученных результатов для бигармонического уравнения $\Delta\Delta u(x_1, \ldots, x_n)=0$ в произвольной ограниченной области G.

Пусть $H(\Delta^2)$ — гильбертово пространство, элементами которого являются системы из n^2 суммируемых в квадрате в области G функций $(h_{i_1 i_2}(x_1, \ldots, x_n))=(h)$ $(i_1, i_2=1, \ldots, n)$, причем предполагается, что $h_{i_1 i_2}(x_1, \ldots, x_n)=h_{i_2 i_1}(x_1, \ldots, x_n)$; скалярное произведение в $H(\Delta^2)$ задается формулой:

$$((h),(g))=\int\limits_G \cdots \int \sum_{i_1, i_2=1}^{n} h^2_{i_1 i_2}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{1}$$

Пусть $Z(\Delta^2)$ — подпространство $H(\Delta^2)$, имеющее всюду плотным множеством совокупность всех элементов $(\zeta)=(\zeta_{x_{i_1} x_{i_2}}(x_1, \ldots, x_n))$, где $\zeta_{x_{i_1} x_{i_2}}(x_1, \ldots, x_n)$ — вторые частные производные функции $\zeta(x_1, \ldots, x_n)$, обращающейся в нуль вне некоторой подобласти G' $(\overline{G'} \subset G)$ и имеющей в области G непрерывные частные производные до четвертого порядка.

Пусть $\Psi^0(\Delta^2)$ — подпространство $H(\Delta^2)$, порождаемое всеми элементами (т. е. являющееся замкнутой линейной оболочкой таких элементов) $(\psi^0_{i_1 i_2}(x_1, \ldots, x_n))=(\psi^0)$, компоненты которых $\psi^0_{i_1 i_2}(x_1, \ldots, x_n)$ $(i_1, i_2=1, \ldots, n)$ дважды непрерывно дифференцируемы в области G, обращаются в нуль вне некоторого куба K, $\overline{K} \subset G$ (каждому элементу (ψ^0) соответствует свой куб K, вне которого его компоненты обращаются в нуль) и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\sum_{i_1, i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi^0_{i_1 i_2}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}=0. \tag{2}$$

Обозначим через $U(\Delta^2)$ ортогональное дополнение в пространстве $H(\Delta^2)$ к подпространству $Z(\Delta^2) \oplus \Psi^0(\Delta^2)$:

$$H(\Delta^2) = U(\Delta^2) \oplus Z(\Delta^2) \oplus \Psi^0(\Delta^2). \tag{3}$$

Доказывается, что подпространство $U(\Delta^2)$ состоит из элементов $(u_{x_{i_1}x_{i_2}}(x_1, \ldots, x_n)) = (u)$, обладающих следующим свойством: в любом кубе $K \subset G$ существует решение бигармонического уравнения $u^{(K)}(x_1, \ldots, x_n)$ ($\Delta\Delta u^{(K)}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ для $(x_1, \ldots, x_n) \in K$), имеющее в кубе K своими вторыми частными производными соответствующие компоненты элемента (u), т. е. $u_{x_{i_1}x_{i_2}}(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим через $F(\Delta^2)$ ортогональную сумму подпространств $U(\Delta^2)$ и $Z(\Delta^2)$:

$$F(\Delta^2) = U(\Delta^2) \oplus Z(\Delta^2). \tag{4}$$

Легко показать, что пространство $F(\Delta^2)$ имеет всюду плотным множеством совокупность элементов $(f_{x_{i_1}x_{i_2}}(x_1, \ldots, x_n)) = (f)$, обладающих тем свойством, что в любом кубе $K \subset G$ существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $f^{(K)}(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая в K вторые частные производные, совпадающие с соответствующими компонентами элемента (f), т. е. $f_{x_{i_1}x_{i_2}}(x_1, \ldots, x_n)$.

Ортогональное разложение (4) соответствует задаче типа Дирихле для бигармонического уравнения, т. е. такой краевой задаче для этого уравнения, когда на границе области G задаются значения u и $\partial u/\partial n$, где n — нормаль. В том случае, когда область G — произвольная, задав некоторой элемент $(f) = (f_{x_{i_1}x_{i_2}}(x_1, \ldots, x_n)) \in F(\Delta^2)$, компоненты которого являются во всей области G вторыми частными производными некоторой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, и спроектировав этот элемент (f) на подпространство $U(\Delta^2)$, мы получим элемент $(u_{x_{i_1}x_{i_2}}) = (u)$, обладающий следующими свойствами:

1) существует решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения $\Delta\Delta u = 0$, имеющее во всей области G своими вторыми частными производными соответствующие компоненты элемента $(u) = (u_{x_{i_1}x_{i_2}})$;

2) пусть Γ_i — последовательность гладких поверхностей, ограничивающих подобласти G_i, стремящиеся изнутри при $i \to \infty$ к области G; тогда на этих поверхностях найденное решение u и его нормальная производная $\partial u/\partial n_i$ (n_i — нормаль к Γ_i) ведут себя в некотором слабом смысле так же, как значения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и ее нормальной производной $\partial f/\partial n_i$ на этих поверхностях Γ_i (см. [1]).

Обозначим через $\Psi(\Delta^2)$ ортогональную сумму подпространств $U(\Delta^2)$ и $\Psi^0(\Delta^2)$:

$$\Psi(\Delta^2) = U(\Delta^2) \oplus \Psi^0(\Delta^2). \tag{5}$$

Легко показать, что пространство $\Psi(\Delta^2)$ имеет всюду плотным множеством совокупность элементов $(\psi_{i_1i_2}(x_1, \ldots, x_n)) = (\psi)$, компоненты которых $\psi_{i_1i_2}(x_1, \ldots, x_n)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i_1, i_2 = 1}^{n} \frac{\partial^2 \psi_{i_1i_2}}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2}} = 0. \tag{2'}$$

Ортогональное разложение (5) соответствует решению некоторой краевой задачи для уравнения $\Delta\Delta u = 0$, являющейся обобщением задачи Неймана для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$. Доказывается, что эта краевая задача состоит в задании на границе Г области G, которую мы сначала предположим гладкой, значений следующих двух дифференциальных выражений относительно u:

$$l_n(u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_{x_i}}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x_i}, \tag{6_1}$$

$$l_\Gamma(u)=\frac{D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})}{D(s)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left[\left(\frac{\partial u_{x_k}}{\partial n}\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_k}\right)\frac{D(s)}{D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})}\right]+\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}, \tag{6_2}$$

где λ_i — локальные координаты на поверхности Г, а n — нормаль к Г. Переход от декартовой системы координат $(x_1,\ldots,x_n)$ в криволинейной системе координат $(n,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})$ в некоторой n-мерной окрестности V данного куска границы задается системой уравнений: $n=n(x_1,\ldots,x_n)$, $\lambda_i=\lambda_i\ (x_1,\ldots,x_n)\ (i=1,\ldots,n-1)$; $\dfrac{D(s)}{D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})}$ равно отношению площади $D(s)$ элемента поверхности Г к площади образа этого элемента в плоскости $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})$. В том случае, когда область G п р о и з в о л ь н а, задав некоторый элемент $(\psi_{i_1i_2}(x_1,\ldots,x_n))=(\psi)$ из указанного выше всюду плотного множества пространства $\Psi(\Delta^2)$ и спроектировав его на подпространство $U(\Delta^2)$, мы получим элемент $(u_{x_{i_1}x_{i_2}}(x_1,\ldots,x_n))=(u)$, обладающий следующим свойством: выражения $l_{n_i}(u)$ и $l_{\Gamma_i}(u)$ ((6_1), (6_2)) ведут себя на последовательности поверхностей Γ_i, определенной выше, в слабом смысле так же, как выражения $l_{n_i}(\psi)$ и $l_{\Gamma_i}(\psi)$, где $l_{n_i}(\psi)$ и $l_{\Gamma_i}(\psi)$ — выражения, составленные из компонент заданного элемента $(\psi_{i_1i_2}(x_1,\ldots,x_n))=(\psi)$ по формулам, аналогичным (6_1) и (6_2), на этих же поверхностях Γ_i:

$$\lim_{i\to\infty}\left[\int_{\Gamma_i}l_{n_i}(u)\frac{\partial f}{\partial n_i}ds_i-\int_{\Gamma_i}l_{\Gamma_i}(u)f\,ds_i\right]=$$
$$=\lim_{i\to\infty}\left[\int_{\Gamma_i}l_{n_i}(\psi)\frac{\partial f}{\partial n_i}ds_i-\int_{\Gamma_i}l_{\Gamma_i}(\psi)f\,ds_i\right], \tag{7}$$

Здесь $f(x_1,\ldots,x_n)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что $(f_{x_{i_1}x_{i_2}}(x_1,\ldots,x_n))=(f)\in F(\Delta^2)$, а $\partial f/\partial n_i$ — ее нормальная производная на поверхности Γ_i.

Так как в выражения (6_1) и (6_2) входят только компоненты элемента $(u_{x_{i_1}x_{i_2}})=(u)$ или их частные производные, то выражения $l_{n_i}(u)$ и $l_{\Gamma_i}(u)$ являются однозначно заданными на Γ_i независимо от того, существует или нет решение $u(x_1,\ldots,x_n)$ уравнения $\Delta\Delta u=0$, имеющее во в с е й области G своими вторыми частными производными компоненты элемента (u). Легко привести, однако, условие, которому должен удовлетворять элемент (ψ), необходимое и достаточное для того, чтобы его проекция $(u_{x_{i_1}x_{i_2}})=(u)$ имела компоненты, являющиеся во в с е й области G вторыми частными производными некоторого решения $u(x_1,\ldots,x_n)$ бигармонического уравнения.

Ортогональное разложение (4) позволяет доказать теорему о существовании многозначных решений бигармонического уравнения $\Delta\Delta u=0$ в п р о и з в о л ь н о й области G.

Пусть $(f_{x_{i_1}x_{i_2}})=(f)$ — некоторый элемент из всюду плотного множества пространства $F(\Delta^2)$ и C — некоторая замкнутая кривая, лежащая в области G. Покроем кривую C цепочкой открытых кубов $K_1, \ldots, K_p$. Согласно определению, в кубе K_1 существует функция $f^{(K_1)}(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая в K_1 своими частными производными соответствующие компоненты элемента $(f) = (f_{x_{i_1}x_{i_2}})$. Пусть $f^{(K_2)}(x_1, \ldots, x_n)$ — аналогичная функция для куба K_2, совпадающая с $f^{(K_1)}(x_1, \ldots, x_n)$ в пересечении $K_1 \cap K_2$. Легко видеть, что такая функция $f^{(K_2)}(x_1, \ldots, x_n)$ существует и единственна. Продолжая таким же образом функцию $f^{(K_2)}(x_1, \ldots, x_n)$ в куб K_3, мы получим функцию $f^{(K_3)}(x_1, \ldots, x_n)$ и т. д. Продолжим, наконец, функцию, полученную таким образом после $p-1$ шагов в кубе K_p, $f^{(K_p)}(x_1, \ldots, x_n)$, из куба K_p в куб K_1. Обозначим полученную функцию через $\bar{f}^{(K_1)}(x_1, \ldots, x_n)$. Очевидно,

$$\bar{f}^{(K_1)}(x_1, \ldots, x_n) = f^{(K_1)}(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i + C_0. \tag{8}$$

Система коэффициентов $\{C_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ не зависит от выбора цепочки кубов K_s, а зависит только от кривой C. Назовем эту систему *периодом элемента* $(f_{x_{i_1}x_{i_2}}) = (f)$ вдоль кривой C:

$$\Pi_C(f) = \{C_i\} \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Легко видеть, что $\Pi_C(f)$ не меняется при замене кривой C на гомологичную ей. Доказывается, что для любой замкнутой кривой C области G проекция $(u_{x_{i_1}x_{i_2}}) = (u)$ элемента $(f) = (f_{x_{i_1}x_{i_2}})$ на подпространство $U(\Delta^2)$ имеет тот же период, что элемент (f):

$$\Pi_C(f) = \Pi_C(u). \tag{9}$$

Заметим еще, что если выбрать иначе (не как в (1)) скалярное произведение в пространстве $H(\Delta^2)$, соответствующее бигармоническому уравнению, то можно установить ортогональное разложение, аналогичное (5) (компоненты элементов пространств $\Psi(\Delta^2)$ и $\Psi^0(\Delta^2)$ будут в этом случае удовлетворять уже иным соотношениям, чем (2) и (2')), — соответствующее краевой задаче смешанного типа (являющейся обобщением для бигармонического уравнения смешанной краевой задачи для уравнений второго порядка) (см. ([1])).

В ([2]) приводятся ортогональные разложения, соответствующие краевым задачам для общего самосопряженного эллиптического уравнения порядка $2m$ $L(u) = 0$ (с переменными коэффициентами).

Для задачи типа Дирихле (на границе области задаются значения u, $\partial u/\partial n, \ldots, \partial^{m-1} u/\partial n^{m-1}$) выводится ортогональное разложение, аналогичное (4); для свободной неоднородной краевой задачи (являющейся обобщением задачи Неймана и смешанной задачи для уравнений второго порядка) выводится ортогональное разложение, аналогичное (5) (при соответствующим образом определенном пространстве $\Psi(L)$). При этом всегда имеет место разложение, аналогичное (3) (вместо Δ^2 надо писать L).

Кроме того, доказана для общего уравнения $L(u) = 0$ теорема о существовании многозначных решений этого уравнения, утверждающая справедливость соотношения, аналогичного (9).

Поступило
4 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, ДАН, 56, № 2 (1947). [2] М. И. Вишик, Диссертация, Математический институт АН СССР, 1947.