Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

М. М. ВАЙНБЕРГ

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 V 1947)

В данной работе рассматривается нелинейное интегральное уравнение

$$\lambda u(x) = \int_B K(x, y)\, g(u(y), y)\, dy \qquad (1)$$

в предположении, что $g(0, x) = 0$ для всех $x \in B$, где B есть ограниченная замкнутая область евклидова пространства n измерений, и доказывается следующая теорема.

Теорема. *Существует сходящаяся к нулю убывающая последовательность чисел* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *такая, что при каждом значении* $\lambda = \mu_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *уравнение* (1) *имеет по меньшей мере одно действительное ненулевое непрерывное в* B *решение, если выполнены условия:*

I. *Ядро* $K(x, y)$ *симметрично, положительно (т. е. все его собственные значения, в смысле теории линейных интегральных уравнений, положительны) и его первая итерация*

$$K_2(x, y) = \int_B K(x, r)\, K(r, y)\, dr$$

непрерывна для $x, y \in B$.

II. *Действительная и непрерывная для всех* u *и* $x \in B$ *функция* $g(u, x)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$u f(u) \leqslant u\, g(u, x) \leqslant a\,|u|^{p+1} + b\,|u|,$$

где $f(u)$ — *какая-нибудь возрастающая функция, обращающаяся в нуль при* $u = 0$, a *и* b — *какие-нибудь положительные числа*, $0 < p < 1$.

Замечание: Условие II, очевидно, может быть заменено следующим условием:

II a) $g(u, x)$ непрерывна;

b) $\operatorname{sgn}[g(u, x)] = \operatorname{sgn} u$;

c) для всякого положительного u_0 найдется такое положительное $\varepsilon(u_0)$, что при $|u| > u_0$ имеет место неравенство $|g(u, x)| > \varepsilon$;

d) $|g(u, x)| \leqslant a\,|u|^p + b$, где a и b положительны, $0 < p < 1$.

Отметим, что существование одного собственного значения уравнения (1) было установлено Л. Лихтенштейном ([1]), М. Голомбом ([2]) и автором ([3]) при иных предположениях о функции $g(u, x)$ и ядре $K(x, y)$.

Приведем ход доказательства теоремы.

Рассмотрим последовательность вырожденных ядер

$$K_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots (\lambda_{k+1} \geqslant \lambda_k > 0)$ суть собственные функции и соответствующие им собственные числа ядра $K(x, y)$ (в смысле теории линейных интегральных уравнений). Подставляя $K_n(x, y)$ в уравнение (1), мы получим решение

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k^{(n)}}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(x), \tag{2}$$

которое соответствует следующему значению параметра λ:

$$\lambda^{(n)} = \frac{1}{c^2} \int\limits_B \psi_n(x) g(\psi_n(x), x)\, dx, \tag{3}$$

при этом

$$\lambda^{(n)} \psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \int\limits_B \varphi_k(y) g(\psi_n(y), y)\, dy, \tag{4}$$

где точка n-мерного евклидова пространства $(\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)})$ есть условно-стационарная точка вспомогательной функции

$$H_n(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}) = \int\limits_B dy \int\limits_0^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\xi_k^{(n)}}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(y)} g(v, y)\, dv$$

на поверхности сферы $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^{(n)2} = c^2$ (число c выбрано произвольно).

Две такие точки наверно существуют. Эти точки, в которых функция H_n принимает абсолютный минимум d_n и абсолютный максимум D_n. В дальнейшем мы будем считать, что (2), (3) и (4) написаны для точки, в которой H_n принимает значение d_n. Разумеется,

$$d_n = \int\limits_B dy \int\limits_0^{\psi_n(y)} g(v, y)\, dv. \tag{5}$$

Выражения (2), (3) и (4) для точки, в которой H_n принимает условный максимум D_n, мы будем соответственно обозначать большими буквами $\Psi_n(x)$, $\Lambda^{(n)}$. Заметим, что

$$\ldots \leqslant d_2 \leqslant d_1 \leqslant D_1 \leqslant D_2 \leqslant \ldots \tag{6}$$

Покажем, что из последовательностей $\{\psi_n(x)\}$ и $\{\lambda^{(n)}\}$ можно выделить такие подпоследовательности, которые сходятся к решению уравнения (1).

Из (2) непосредственно следует, что

$$\int_B \psi_n^2(x)\,dx \leqslant \frac{c}{\lambda_1}; \tag{7}$$

применяя неравенство Шварца, имеем

$$l_n = \int_B |\psi_n(x)|\,dx \leqslant c\sqrt{\frac{\text{mes}\,B}{\lambda_1}}, \tag{8}$$

где λ_1 есть наименьшее собственное значение $K(x, y)$.

Применяя теперь неравенство Гельдера к выражению (3), мы, согласно (7), (8) и условию II, получим

$$\lambda^{(n)} \leqslant \frac{a}{c^2}\int_B |\psi_n(x)|^{p+1}dx + \frac{b}{c^2}\int_B |\psi_n(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a}{c^2}\left(\int_B |\psi_n(x)|\,dx\right)^{1-p}\left(\int_B \psi_n^2(x)dx\right)^p + \frac{b}{c}\sqrt{\frac{\text{mes}\,B}{\lambda_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a\,(\text{mes}\,B)^{\frac{1-p}{2}}}{c^{1-p}\lambda_1^{(1+p)/2}} + \frac{b}{c}\sqrt{\frac{\text{mes}\,B}{\lambda_1}}. \tag{9}$$

Для доказательства теоремы нужна также оценка $\lambda^{(n)}$ снизу. Предполагая, что для выражения (8) $\overline{\lim}\, l_n = \alpha \neq 0$, мы можем выделить подпоследовательность $\{l_{n_k}\}$, для которой $l_{n_k} > \alpha/2$. Используя теперь условие II, что $u\,g(u, x) \geqslant u\,f(u)$, можно показать, что для этих n_k имеет место неравенство

$$\lambda^{(n_k)} > \alpha_1(c, \alpha) > 0. \tag{10}$$

Из (9) и (10) вытекает существование подпоследовательности $\left\{\lambda^{(m_k)}\right\}$, сходящейся к μ, притом

$$0 < \alpha_1 \leqslant \mu \leqslant \frac{a_1}{c^{1-p}} + \frac{b_1}{c}, \tag{11}$$

где положительные числа a_1 и b_1 не зависят от c.

Используя теперь (7) и условия I и II, можно показать, что последовательность непрерывных в B функций

$$\omega_{m_k}(x) = \int_B K(x, y)\,g(\psi_{m_k}(y), y)\,dy$$

компактна в смысле равномерной сходимости, т. е. из последовательности $\{\omega_{m_k}(x)\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{\omega_{p_k}(x)\}$, что

$$\lim_{k\to\infty} \omega_{p_k}(x) = \omega(x), \tag{12}$$

где $\omega(x)$ непрерывна. Далее, согласно (4) и известной теореме разложения [4], имеем, что

$$R_{p_k}(x) = \lambda^{(p_k)}\psi_{p_k}(x) - \int_B K(x, y)\,g(\psi_{p_k}(y), y)\,dy =$$

$$= -\sum_{i=1+p_k}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\int_B \varphi_i(y)\,g(\psi_{p_k}(y), y)\,dy \tag{13}$$

сходится равномерно к нулю для всякой фиксированной функции $g(\psi_{p_k}(y), y)$. Однако, если воспользоваться свойством первой итерации ядра $K(x, y)$, условием II и (7), то можно показать, что $R_{p_k}(x)$ сходится к нулю равномерно относительно $x \in B$ и $g(\psi_{p_k}(y), y)$.

Отсюда и из (11), (12) путем перехода к пределу в (13) находим, что

$$\psi(x) = \lim_{k\to\infty} \psi_{p_k}(x) = \frac{1}{\mu}\omega(x),$$

$$\mu\psi(x) = \int K(x, y)\, g(\psi(y), y)\, dy,$$

где $\mu > 0$ и $\int\limits_B |\psi(x)| \geqslant \frac{\alpha}{2} > 0$.

Остается рассмотреть случай, когда l_n и $L_n = \int\limits_B |\Psi_n(x)|\, dx$ сходятся к нулю одновременно, ибо если верхний предел L_n отличен от нуля, то можно повторить предыдущие рассуждения.

Для разбора этого случая устанавливается неравенство

$$|d_n| \leqslant \frac{a}{1+p}\left(\frac{c^2}{\lambda_1}\right)^p l_n^{1-p} + b l_n, \tag{14}$$

которое получается из (5), если воспользоваться неравенством Гельдера, условием II, (7) и (8).

Из (14) вытекает, что $d_n \to 0$. Так же находим, что $D_n \to 0$. Отсюда и из (6) следует, что $d_n = D_n = 0$ для всех n, а значит, всякая функция вида $\psi(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(x)$ при условии, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2 = c^2$, будет решением (1), если в него подставить $K_n(x, y)$ вместо $K(x, y)$ и $\lambda^{(n)}$ из (3) вместо λ. В частности, функция $\psi(x) = \frac{c}{\sqrt{\lambda_1}}\varphi_1(x)$ будет таким решением для всякого n.

Совершая здесь предельный переход, найдем, что эта функция будет решением (1), где значение λ найдется из (3), если туда подставить $\frac{c}{\sqrt{\lambda_1}}\varphi_1(x)$ вместо $\psi_n(x)$.

Таким образом, доказано существование одного собственного значения $\lambda = \mu$ уравнения (1). Пользуясь теперь оценкой (11) и произвольностью c, мы можем легко выделить счетное множество собственных значений $\mu_1, \mu_2, \ldots$ $(0 < \mu_{k+1} < \mu_k)$, которые сходятся к нулю. Для этого достаточно взять подходящую возрастающую последовательность чисел $c_1, c_2, \ldots$

Этим теорема доказана. В заключение отметим, что в условии II существенно требование, чтобы $p < 1$, ибо при $p \geqslant 1$ можно положить $g(u, x) \equiv u$, и тогда, в случае вырожденного ядра, будет лишь существовать конечное число собственных значений.

Поступило
28 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin, 1931, S. 156. [2] M. Golomb, Math. Z., 39, H. 1, § 5 (1934). [3] М. М. Вайнберг, ДАН, 46, № 2 (1945). [4] Э. Гурса, Курс мат. анализа, 1934, III (2), стр. 115.