Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 4

ГЕОЛОГИЯ

А. Б. ВИСТЕЛИУС и О. В. САРМАНОВ

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ОДНОГО ГЕОЛОГИЧЕСКИ ВАЖНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 5 V 1947)

§ 1. В течение 1946—47 гг. авторами были исследованы распределения частот сульфата кальция в палеозое востока Русской платформы. При этом выяснилось, что в отложениях нижнего и среднего карбона, отвечающих наименее засолоненным карбонатным фациям, встречаются распределения, обладающие резко выраженной положительной асимметрией и не удовлетворяющие критериям кривых Пирсони и закона Пуассона ([1]). Тщательный разбор условий формирования отмеченных отложений позволил остановиться на следующей генетической схеме сульфатной седиментации при образовании карбонатных осадков.

В верхней части слоя подвижного ила происходит накопление сульфата кальция. При движении воды вследствие волнений или эпизодических течений ил взмучивается и сульфаты попадают в воды бассейна, способные их растворять. После короткого пребывания во взвешенном состоянии осадок, потеряв часть сульфатов, падает на дно и снова попадает в среду, насыщенную сульфатами. Так происходит до тех пор, пока ил с сульфатами не перейдет из стадии отложения в стадию накопления, с которой начинается литификация накопленного материала.

Целью настоящей работы является выработка стохастической схемы изложенного процесса сульфатной седиментации и сравнение ее с наиболее типичным из указанных асимметричных распределений. Этот путь позволяет проверить соответствие геологических построений наблюдаемым фактам и, таким образом, повышает объективность генетических интерпретаций.

§ 2. Изложенная выше схема сульфатной седиментации при образовании карбонатных фаций в основе сводится к следующей урновой схеме.

В урне имеется N шаров, на поверхности которых отмечено различное число точек, а именно M_i шаров несут i точек ($i=0, 1, \ldots, k$, k—фиксированное число). $\sum\limits_{i=0}^{k} M_i = N$. Тогда начальные вероятности вынуть шар с i точками $P_{i,0}=M_i/N$

$$\sum_{i=0}^{k} P_{i,0}=1\,. \tag{1}$$

Стохастический опыт состоит в следующем. Из урны наудачу вынимается один шар; если он не содержал точек, он опускается в урну без изменения; если он имел i точек ($i=1, 2, \ldots, k$), одна точка стирается, после чего шар возвращается в урну и все шары перемешиваются.

Спрашивается, каково распределение вероятностей вынуть шар с i точками ($i=0, 1, \ldots, k$) после n опытов, т. е. каковы $P_{i,n}$ ($i=0,1,\ldots,k$).

Легко проверить, что вероятности $P_{i,n}$ связаны с вероятностями $P_{i,n-1}$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) следующими рекуррентными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} P_{0,n}&=P_{0,n-1}+P_{1,n-1}\frac{1}{N}, \\ P_{i,n}&=P_{i,n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)+P_{i+1,n-1}\frac{1}{N}, \\ P_{k,n}&=P_{k,n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Многократное применение формул (2) дает следующее общее выражение для $P_{i,n}$ через $P_{i,0}$ ($i=1, 2, \ldots, k$):

$$P_{i,n}=\sum_{h=0}^{n} C_n^h\frac{1}{N^h}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-h}P_{i+h,0}; \tag{3'}$$

однако в формуле (3') все $P_{i+h,0}$ нужно заменить нулем, если $i+h>k$.

Нас будут интересовать значения $P_{i,n}$ при больших n. Поэтому положим $n\geqslant k-1$; тогда во всех формулах (3') последнее слагаемое будет содержать $P_{k,0}$ и мы можем написать:

$$\left.\begin{gathered} P_{i,n}=\sum_{h=0}^{k-i} C_n^h\frac{1}{N^h}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-h}P_{i+h,0}, \\ i=1,2,\ldots,k; \qquad n\geqslant k-1, \end{gathered}\right\} \tag{3}$$

причем $P_{0,n}$ находится из условия $P_{0,n}=1-\sum_{i=1}^{k}P_{i,n}$. Пусть теперь N и n неограниченно возрастают, причем $n=\lambda N$, где $\lambda>0$ фиксировано. Тогда $C_n^h\frac{1}{N^h}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-h}\to\frac{\lambda^h}{h!}e^{-\lambda}$ ($N\to\infty$, $n=\lambda N$), и мы получим следующую асимптотическую формулу:

$$P_i=\sum_{h=0}^{k-i}\frac{\lambda^h}{h!}e^{-\lambda}P_{i+h,0}$$

($i=1,2,\ldots,k$), причем опять $P_0=1-\sum_{=1}^{k}P_i$.

Формула (4) верна при любом начальном распределении вероятностей, удовлетворяющих условию (1).

В рассматриваемой геологической проблеме имеются основания к тому, чтобы предположить начальное распределение следующим (урезанному) закону Пуассона с параметром $a>0$.

Итак, положим $P_{i,0}=\frac{a^i}{\ }e^{-a}$ ($i=1,2,\ldots,k$); $P_{0,0}=1-\sum_{i=1}^{k}P_{i,0}$;

тогда вместо формулы (4) получим:

$$P_i = e^{-(a+\lambda)} a^i \sum_{h=0}^{k-i} \frac{(a\lambda)^h}{h!\,(i+h)!} =$$

$$= e^{-(a+\lambda)} a^i \left[\frac{1}{i!} + \frac{a\lambda}{1!\,(i+1)!} + \frac{(a\lambda)^2}{2!\,(i+2)!} + \dots + \frac{(a\lambda)^{k-i}}{(k-i)!\,k!}\right] \qquad (5)$$

Формула (5) показывает, что асимптотическое распределенне представляет распределение Пуассона с пертурбационным множителем, причем при $\lambda=0$ получается просто исходное распределение Пуассона. Формулы (5) показывают, кроме того, что при $a \leqslant 2$ (и любом $\lambda > 0$) $P_{i+1} < P_i$ $(i=1, 2, \dots, k)$, при $a > \lambda$ и небольших λ имеется одно максимальное P_i при $i > 1$.

Гистограмма P_i (при $a \leqslant 2$) асимметрична и по внешнему виду напоминает гистограмму для e^{-ax} $(a > 0)$.

§ 3. Сравнение наиболее типичного из исследованных распределений сульфатов, относящегося к C_2^{3+4} из района сел. Нытва, с данными, получаемыми при использовании формулы (5) при $k=5$, $a=\lambda=2$, дано в табл. 1 и на рис. 1.

Таблица 1

№№ разрядов	1	2	3	4	5	6	
Наблюденные ординаты Y	40	18	5	3	1	0	Коэффициент точности С. Н. Бернштейна $H \approx 0,8$
Вычисленные ординаты Y'	40,8	12,7	7,8	3,9	1,5	0,3	
$\Delta = Y - Y'$	−0,8	+5,3	−2,8	−0,9	−0,5	−0,3	

Как видно из приведенных данных, согласие между исследуемыми распределениями и теоретическим распределением вполне удовлетворительное и, таким образом, стохастическая проверка гипотезы, изложенной в § 1, не противоречит наблюдаемым фактам.

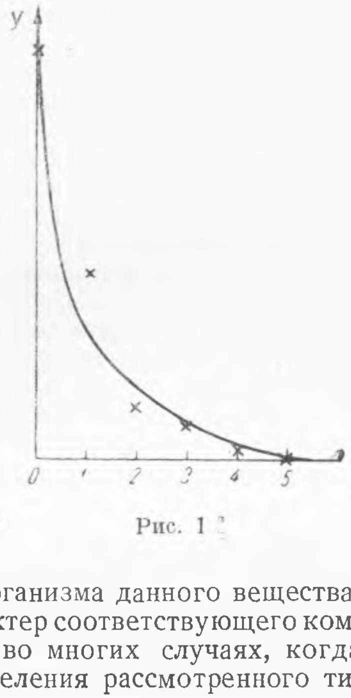

Рис. 1

Интересно отметить, что распределения, тождественные распределениям сульфатов, чрезвычайно широко распространены в геологии. Очень близки к ним распределения многих элементов в живом веществе моря, в нефтяных водах Кавказской провинции, магния в изверженных породах поверхности Земли, ряда рассеянных элементов в горных породах и минералах. Характерной чертой ассоциаций, в которых встречаются подобные распределения, являются неблагоприятные условия для существования данного компонента — это или магматические процессы, приводящие к систематической отсадке изучаемого элемента (магния), или какие-то физиологические процессы, приводящие к выносу из организма данного вещества, или, наконец, реликтовый, рассеянный характер соответствующего компонента. Таким образом, оказывается, что во многих случаях, когда наблюдаются резко асимметричные распределения рассмотренного типа, осуществляется процесс стохастический, смысл которого очень близок к смыслу урновой схемы, разобранной в § 2.

Изложенное позволяет считать, что рассмотренная урновая схема является реальной моделью многих важных геологических процессов и может быть с успехом применена для решения ряда геологических задач.

Построение стохастических схем для исследуемых геологией явлений должно быть необходимым элементом каждого геологического исследования: оно должно применяться во всех случаях, когда наблюдаются устойчивые специфические распределения, не отвечающие условиям схемы Гаусса или Пуассона.

Всесоюзный нефтяной
геолого-разведочный институт
Ленинград

Поступило
5 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Романовский, Математическая статистика, 1938.