Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. П. СОКОЛОВ

ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ ПЛАСТИНКИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 30 I 1948)

В настоящей заметке рассматривается растяжение тонкой пластинки неограниченных размеров с круговым вырезом, края которого свободны от внешних усилий. На бесконечности действуют равномерно распределенные напряжения $\sigma_x = q\sigma_s$ и $\sigma_y = p\sigma_s$, причем $0 < q \leqslant 1$, $0 < p \leqslant 1$, где q, p — безразмерные параметры, характеризующие величину напряжения, а σ_s обозначает предел текучести при простом растяжении.

С увеличением p и q пластинка, находившаяся первоначально в упругом состоянии, будет иметь область пластических деформаций, первые признаки которой, как известно, появляются в двух диаметрально противоположных точках отверстия пластинки. При дальнейшем возрастании p и q будут вступать в состояние пластичности следующие точки пластинки и, очевидно, можно подобрать такие p и q, когда пластическая зона заполнит окрестность отверстия, контур которого будет внешней границей этой области. Ниже будет рассмотрен метод определения уравнения кривой внутренней границы пластичности, соприкасающейся с упругой областью пластинки, и напряжения в пластической зоне.

Пусть под воздействием внешних растягивающих напряжений пластинка находится в упругом состоянии и σ_x, σ_y — компоненты напряжения в прямоугольной системе координат, расположенной в средней плоскости пластинки с началом координат в центре отверстия. Введем безразмерную величину $\rho = r/a$, где r — расстояние в единицах длины от центра отверстия до произвольной точки пластинки; a — радиус отверстия. Перейдем к полярной системе координат ρ, θ с полюсом в центре отверстия (ρ — полярный радиус, θ — угол между ρ и осью ox). Значения напряжений на бесконечности в новой системе координат σ_ρ, σ_θ и $\tau_{\rho\theta}$ определяются формулами:

$$\sigma_\rho = \frac{p+q}{2}\sigma_s - \lambda\sigma_s\cos 2\theta,$$

$$\sigma_\theta = \frac{p+q}{2}\sigma_s + \lambda\sigma_s\cos 2\theta,$$

$$\tau_{\rho\theta} = \lambda\sigma_s\sin 2\theta$$

где $\lambda = \dfrac{p-q}{2}$.

Компоненты напряжения для любой точки пластинки имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{p+q}{2}\sigma_s\left(1-\frac{a}{\rho^2}\right)-\lambda\sigma_s\left(1-\frac{2b}{\rho^2}+\frac{c}{\rho^4}\right)\cos 2\theta,\\
\sigma_\theta &= \frac{p+q}{2}\sigma_s\left(1+\frac{a}{\rho^2}\right)+\lambda\sigma_s\left(1+\frac{c}{\rho^4}\right)\cos 2\theta,\\
\tau_{\rho\theta} &= \lambda\sigma_s\left(1+\frac{b}{\rho^2}-\frac{c}{\rho^4}\right)\sin 2\theta,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где a, b, c — произвольные постоянные, определяемые из контурных условий. Если в формулы (1) подставить значения a, b, c и $p=0$, то мы придем к решению, которое получено Г. Киршем. Этот результат приводится в литературе (см., например [1]). Однако нет никакого смысла устанавливать значения a, b, c из условий на контуре выреза пластинки, так как в окрестности отверстия может быть пластическая зона. Допустим, что параметры p и q выбраны так, что пластическая зона занимает окрестность отверстия, внешняя граница которой совпадает с контуром выреза. В этом случае компоненты напряжения σ_ρ, σ_θ, $\tau_{\rho\theta}$ в пластической области удовлетворяют двум уравнениям равновесия:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0,\\
&\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho}=0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

и условию пластичности Сен-Венана — Соколовского:

$$
(\sigma_\rho-\sigma_\theta)^2+4\tau_{\rho\theta}{}^2=\left[2\sigma_s-|\sigma_\rho+\sigma_\theta|\right]^2 \text{ при } \sigma_\rho\sigma_\theta\geqslant\tau_{\rho\theta}{}^2 \tag{3}
$$

или

$$
(\sigma_\rho-\sigma_\theta)^2+4\tau_{\rho\theta}{}^2=\sigma_s{}^2 \text{ при } \sigma_\rho\sigma_\theta\leqslant\tau_{\rho\theta}{}^2. \tag{4}
$$

В рассматриваемом примере имеет место условие (3). Компоненты напряжения могут быть получены в замкнутом виде. Этот результат принадлежит В. В. Соколовскому [2]. В некоторых случаях этот результат удобнее представить в полярных координатах.

В пластической области компоненты напряжения σ_ρ, σ_θ, $\tau_{\rho\theta}$ можно вычислить по формулам:

$$
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2(\varphi-\theta),\\
\sigma_\theta &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2(\varphi-\theta),\\
\tau_{\rho\theta} &= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2(\varphi-\theta),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где σ_1, σ_2 — главные напряжения, причем в данном примере $\sigma_1>\sigma_2>0$ и φ — угол, составляемый наибольшим напряжением с осью ox. Введем следующие обозначения:

$$
\sigma_1+\sigma_2=2\sigma_s(1-\chi),\quad \sigma_1-\sigma_2=2\sigma_s\chi,
$$

где χ — функция переменных ρ, θ, и подставим их в (5). Тогда получим:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \sigma_s[1 - 2\chi\sin^2(\varphi - \theta)],\\ \sigma_\theta &= \sigma_s[1 - 2\chi\cos^2(\varphi - \theta)],\\ \tau_{\rho\theta} &= \sigma_s\chi\sin 2(\varphi - \theta).\end{aligned} \tag{6}$$

Теперь условие (3) удовлетворяется тождественно. После подстановки формул (6) в уравнения (2) получаем уравнения, содержащие функции $\chi(\rho, \theta)$ и $\varphi(\rho, \theta)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\sin 2(\varphi - \theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\cos(\varphi - \theta) = 0,\\ &\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\sin 2(\varphi - \theta) - \frac{2}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\cos^2(\varphi - \theta) + 2\chi\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Интегралы уравнений (7) имеют вид:

$$\begin{aligned}&\rho\cos(\varphi - \theta) = f(\varphi),\\ &2\chi = \frac{F(\varphi)}{\rho\sin(\varphi - \theta) + f'(\varphi)},\end{aligned} \tag{8}$$

где $f(\varphi)$ и $F(\varphi)$ — произвольные функции.

Компоненты напряжения в пластической зоне в рассматриваемом примере не зависят от угла θ:

$$\sigma_\rho = \sigma_s\left(1 - \frac{1}{\rho}\right), \quad \sigma_\theta = \sigma_s, \quad \tau_{\rho\theta} = 0, \tag{9}$$

что сразу следует из соотношений (2) и (3).

Для отыскания внутренней границы пластической области принимается, что p и q мало отличаются друг от друга, т. е. λ — малая величина и члены, содержащие λ^2, могут быть отброшены. Уравнение кривой двух состояний запишем в следующей форме:

$$\gamma = \gamma_0 + \lambda\gamma_1(\theta), \tag{10}$$

где γ_0 — некоторая постоянная величина, $\gamma_1(\theta)$ — неизвестная функция θ. Вычислим значения упругих напряжений (1) на кривой (10) с точностью до членов, содержащих λ^2; имеем

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{p+q}{2}\sigma_s\left(1 - \frac{a}{\gamma_0^2}\right) - \lambda\sigma_s\left(1 - \frac{2b}{\gamma_0^2} + \frac{c}{\gamma_0^4}\right)\cos 2\theta + \lambda\sigma_s\gamma_1(\theta)\frac{a(p+q)}{\gamma_0^3},\\ \sigma_\theta &= \frac{p+q}{2}\sigma_s\left(1 + \frac{a}{\gamma_0^2}\right) + \lambda\sigma_s\left(1 + \frac{c}{\gamma_0^4}\right)\cos 2\theta - \lambda\sigma_s\gamma_1(\theta)\frac{a(p+q)}{\gamma_0^3},\\ \tau_{\rho\theta} &= \lambda\sigma_s\left(1 + \frac{b}{\gamma_0^2} - \frac{c}{\gamma_0^4}\right)\sin 2\theta.\end{aligned} \tag{11}$$

Для напряжений пластической зоны

$$\sigma_\rho = \sigma_s\left(1 - \frac{1}{\gamma_0}\right) + \frac{\lambda\gamma_1(\theta)}{\gamma_0^2}\sigma_s, \quad \sigma_\theta = \sigma_s, \quad \tau_{\rho\theta} = 0. \tag{12}$$

3*

Очевидно, одноименные компоненты напряжений (11) и (12) должны совпадать. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим систему уравнений, из которой определим:

$$\gamma_0 = \frac{1}{2-p-q}, \quad \gamma_1(\theta) = 4\gamma_0^2 \cos 2\theta, \quad a = \frac{1}{(2-p-q)(p+q)},$$

$$b = \frac{2}{(2-p-q)^2}, \quad c = \frac{3}{(2-p-q)^4}.$$

Уравнение кривой внутренней границы пластической зоны имеет вид:

$$\gamma = \gamma_0 + 4\lambda\gamma_0^2 \cos 2\theta$$

или

$$\gamma = \frac{1}{2-p-q} + \frac{2(p-q)}{(2-p-q)^2} \cos 2\theta. \qquad (10')$$

На прилагаемом чертеже построены эпюры нормальных напряжений в пластической зоне и граница двух состояний пластинки при

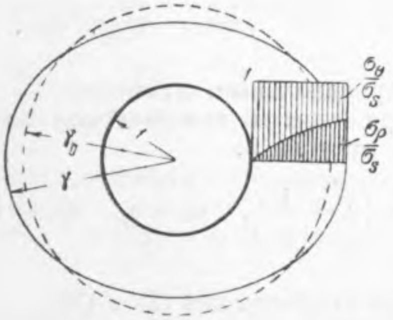

Рис. 1

$\lambda = 0{,}0125$, $p = 0{,}7375$, $q = 0{,}7125$. Пунктирная линия — окружность радиуса γ_0 указывает границу пластической зоны при всестороннем растяжении пластинки.

Поступило
8 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Тимошенко, Теория упругости, 1934. [2] В. В. Соколовский, Теория пластичности, 1946.