Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. П. МИЛЬМАН и М. А. РУТМАН

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ ТЕОРЕМЫ О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТОЧЕК РЕГУЛЯРНО-ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 I 1948)

Пусть E и E^* обозначают, соответственно, пространство типа (B) и его сопряженное[1]. Множество $K \subset E^*$ называется регулярно-выпуклым[2], если для каждого $f_0 \bar{\in} K$ найдется такой элемент $x_0 \in E$, что

$$f_0(x_0) > \sup_{f \in K} f(x_0).$$

Точка f_0 из K называется экстремальной[3], если она не является серединой отрезка, целиком принадлежащего K.

В настоящей статье дается уточнение следующей теоремы[3].

Всякое регулярно-выпуклое ограниченное множество из E^* совпадает с регулярно-выпуклой оболочкой множества всех его экстремальных точек*.

Пусть f_0 принадлежит K и существует элемент $x \in E$, $\|x\| = 1$ такой, что

$$f_0(x) = \sup_{f \in K} f(x).$$

Совокупность таких элементов x из E мы обозначим через $M(f_0)$ и назовем опорным пучком, соответствующим точке f_0.

Заметим, что если даже K не есть тело, то, вообще говоря, не всякая точка K имеет опорный пучок. Опорный пучок может отсутствовать даже у экстремальных точек.

Опорный пучок мы будем называть максимальным, если он не является правильной частью какого-либо другого опорного пучка.

Лемма 1. *Каждый опорный пучок содержится в некотором максимальном опорном пучке.*

Доказательство. Пусть $M(f_1)$ — данный опорный пучок и ϑ' — трансфинитный номер, для которого уже построена последовательность $\{f_\vartheta\}$, $f_\vartheta \in K$, $\vartheta < \vartheta'$, такая, что

$$M(f_{\vartheta_1}) \subset M(f_{\vartheta_2}) \quad \text{при} \quad \vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta' \;**.$$

---

* Под регулярно-выпуклой оболочкой данного множества подразумевается наименьшее регулярно-выпуклое множество, содержащее данное множество.

** Обозначение $A \subset B$ мы понимаем в том смысле, что A является правильной частью B.

Строим $f_{\vartheta'}$ следующим образом:

1) Если ϑ' непредельный трансфинитный номер, то $f_{\vartheta'}$ выбирается из K так, чтобы $M(f_{\vartheta'-1}) \subset M(f_{\vartheta'})$ (если такого элемента $f_{\vartheta'}$ в K не существует, то все доказано).

2) Если ϑ' — предельный номер, то в качестве $f_{\vartheta'}$ мы выберем один из трансфинитных пределов (¹) последовательности $\{f_\vartheta\}$ $(\vartheta < \vartheta')$. Элемент $f_{\vartheta'}$ принадлежит K, так как всякое регулярно-выпуклое множество трансфинитно-замкнуто (²).

Докажем, что

$$\sum_{\vartheta < \vartheta'} M(f_\vartheta) \subseteq M(f_{\vartheta'}). \tag{1}$$

По определению трансфинитного предела

$$\inf_{\vartheta \geqslant \vartheta_1} f_\vartheta(x) \leqslant f_{\vartheta'}(x) \leqslant \sup_{\vartheta \geqslant \vartheta_1} f_\vartheta(x), \quad \vartheta_1 < \vartheta' \tag{2}$$

для любого $x \in E$.

Пусть $x \in M(f_{\vartheta_1})$. Если $\vartheta_1 \leqslant \vartheta < \vartheta'$, то $x \in M(f_\vartheta)$, и поэтому $f(x) \leqslant \leqslant f_\vartheta(x)$ при всех $f \in K$. Следовательно, учитывая (2),

$$f(x) \leqslant \inf_{\vartheta \geqslant \vartheta_1} f_\vartheta(x) \leqslant f_{\vartheta'}(x) \qquad (x \in M(f_{\vartheta_1});\ \vartheta_1 < \vartheta';\ f \in K).$$

Это соотношение верно при любом $\vartheta_1 < \vartheta'$, поэтому:

$$f(x) \leqslant f_{\vartheta'}(x) \text{ при всех } f \in K \text{ и } x \in \sum_{\vartheta < \vartheta'} M(f_\vartheta).$$

Соотношение (1) доказано.

Остается заметить, что процесс построения расширяющихся опорных пучков должен оборваться на некотором трансфинитном номере, потому что построенные f_ϑ все различны, а множество K имеет определенную мощность.

Совокупность всех точек из K, которым соответствует один и тот же *максимальный* опорный пучок M, назовем *экстремальной гранью* K и обозначим через $K(M)$.

Лемма 2. *Всякая экстремальная грань $K(M)$ регулярно-выпуклого ограниченного множества K из E^* есть регулярно-выпуклое множество, экстремальные точки которого являются экстремальными точками для K.*

Доказательство. Докажем, что $K(M)$ регулярно-выпукло, а именно: для всякого элемента $f_0 \in E^* - K(M)$ найдется $x_0 \in E$ так, что $f_0(x_0) > \sup\limits_{f \in K(M)} f(x_0)$.

Если $f_0 \in K$, то существование x_0 очевидно. Пусть $f_0 \in K - K(M)$. Если $x \in M$, то $f_0(x) \leqslant \sup\limits_{f \in K} f(x) = \varphi(x)$ при всех $\varphi \in K(M)$.

Поэтому рассмотрим два случая:

1-й случай. Найдется $x_0 \in M$ так, что $f_0(x_0) < \sup\limits_{f \in K} f(x_0)$.

Полагая $y_0 = -x_0$, мы имеем в этом случае:

$$f_0(y_0) > \sup_{\varphi \in K(M)} \varphi(y_0) = \varphi(y_0) \quad \text{при всех} \quad \varphi \in K(M).$$

2-й случай. При всех $x \in M$ выполняется $f_0(x) = \sup\limits_{f \in K} f(x)$.

В этом случае $M \subset M(f_0)$, и потому $M = M(f_0)$; следовательно, $f_0 \in K(M)$. Таким образом, этот случай невозможен.

Докажем вторую часть леммы.

Если f_0 является экстремальной точкой $K(M)$ и $f_0 = \frac{f_1 + f_2}{2}$, где $f_1, f_2 \in K$, то при всяком $x \in M$ из равенства $f_0(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$ вытекает $f_1(x) = f_2(x) = f_0(x)$. Следовательно, $f_1(x) = \sup\limits_{f \in K} f(x)$ при всех $x \in M$. Поэтому $M(f_1) \supseteq M$ и, значит, $M(f_1) = M$ и $f_1 \in K(M)$. Равенство $f_0 = \frac{f_1 + f_2}{2}$ при $f_1, f_2 \in K(M)$ влечет $f_1 = f_2$, и потому f_0 экстремально не только в $K(M)$, но и в K.

Теорема. *Пусть K — регулярно-выпуклое и ограниченное множество в E^*. Выберем из каждой экстремальной грани по одной произвольной точке — „представителю". Тогда регулярно-выпуклая оболочка K_E множества E этих представителей совпадает с K. В частности, в качестве представителя экстремальной грани может быть выбрана экстремальная точка K.*

Доказательство. Если $f_0 \overline{\in} K_E$, но $f_0 \in K$, то существует элемент $x_0 \in E$ такой, что $f_0(x_0) > \sup\limits_{f \in K_E} f(x_0)$. Ясно, что существует элемент $g_0 \in K$ такой, что

$$g_0(x_0) = \sup_{f \in K} f(x_0) > \sup_{f \in K_E} f(x_0),$$

т. е. $x_0 \in M(g_0)$. Согласно лемме 1, существует максимальный опорный пучок M, содержащий $M(g_0)$. В экстремальной грани $K(M)$ имеется элемент h_0, попавший в E; неравенство

$$h_0(x_0) = g_0(x_0) > \sup_{f \in K_E} f(x_0)$$

является поэтому противоречием. Следовательно: $K_E = K$.

То обстоятельство, что множество E может быть выбрано состоящим из экстремальных точек K, прямо вытекает из леммы 2.

Одесский педагогический институт
им. Ушинского и
Одесское высшее мореходное училище

Поступило
22 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932. [2] M. Krein and V. Šmulian, Ann. Math., 41, No. 3 (1940). [3] M. Krein and D. Milman, Studia Math., 9 (1940).