Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 1

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ЛИННИК

О НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЯХ МАРКОВА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 4 II 1948)

Рассматривается бесконечная треугольная матрица случайных величин, n-ю строчку которой образуют величины $X_{1n}, X_{2n}, \ldots, X_{nn}$, связанные в простую цепь Маркова, причем величина X_{hn} принимает k_{hn} значений $a_{1n}^{(h)}, a_{2n}^{(h)}, \ldots, a_{k_{hn}n}^{(h)}$. Относительно последних приняты такие условия:

I. $$|a_{in}^{(h)}| < K_0 \text{ (для любых } i, h, n).$$

II. $$\frac{1}{k_{hn}} \sum_{i=1}^{k_{hn}} (a_{in}^{(h)} - \zeta_{hn})^2 > c_0, \quad \text{где} \quad \zeta_{hn} = \frac{a_{1n}^{(h)} + a_{2n}^{(h)} + \ldots + a_{k_{hn}, n}^{(h)}}{k_{hn}}.$$

III. $$2 \leqslant k_{hn} < K_1.$$

$K_0, K_1, \ldots, c_0, c_1, \ldots, C_0, C_1, \ldots$ — произвольно фиксированные при задании матрицы положительные константы.

Условия I и III мало существенны, и их можно значительно ослабить, рассматривая, например, и бесконечнозначные цепи.

Задание n-й строчки как цепи Маркова осуществляется указанием вероятностей перехода:

$$p_{iln}^{(h)} = P\left(X_{hn} = a_{ln}^{(h)} \mid X_{h-1, n} = a_{in}^{(h-1)}\right). \tag{1}$$

Рассматривается сумма по n-й строчке

$$S_n = X_{1n} + X_{2n} + \ldots + X_{nn}, \text{ причем } E(S_n) = A_n, \ D(S_n) = B_n.$$

Теорема. *Каково бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$, при условии*

$$p_{iln}^{(h)} \geqslant \frac{1}{n^{1/3 - \varepsilon}} \tag{2}$$

нормированное уклонение

$$\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}} \tag{3}$$

при $n \to \infty$ приближается к гауссову распределению с параметрами $(0, 1)$.

Если же известно только, что

$$p_{iln}^{(h)} \geqslant \frac{1}{n^{1/3}}, \tag{2a}$$

то это, вообще говоря, не имеет места.

Исследования подобного типа, начатые А. А. Марковым [1], продолжались С. Н. Бернштейном, создавшим для них новую методику [2–5], и Н. А. Сапоговым [6,7]. В [2] доказывается, что в условиях (2а) (3) не обязано приближаться к гауссову распределению; в [2] и [6], что оно обязано к этому при $p_{iln}^{(h)} > 1/n^{1/5}$, в [3] и [4] развит особый алгоритм, годный лишь для двузначных цепей ($k_{hn} = 2$), с помощью которого доказана для этого случая сформулированная выше теорема.

Мы пользуемся для доказательства теоремы методом С. Н. Бернштейна, дополняя его новым алгоритмом «сечений» цепи Маркова. Изложим вкратце алгоритм сечений.

Пусть дана простая цепь Маркова $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с условиями типа I, II, III и $p_{ilh}^{(h)} > 0$ вместо (2). Не нарушая общности, можем считать $E(X_h) = A_n = 0$. Возьмем целые числа M и Q с условиями $2 \leqslant M \leqslant \sqrt{n}$, $2 \leqslant Q < \sqrt{M}$. Среди индексов наших переменных $1, 2, \ldots, n$ возьмем индексы:

$$\alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{21} = M + 1, \ldots, \alpha_{q_1-1,1} = (q_1 - 2) M + 1, \quad \alpha_{q_1 1} = n. \tag{4}$$

Совмещение событий

$$X_{\alpha_{11}} = a_{l_{\alpha_{11}}}^{(\alpha_{11})}, \ldots, X_{\alpha_{q_1 1}} = a_{l_{\alpha_{q_1 1}}}^{(\alpha_{q_1 1})} \tag{5}$$

назовем сечением Λ_1 цепи Маркова, а его вероятность обозначим P_{Λ_1}, опуская соответствующие индексы.

Далее, среди индексов (4) фиксируем вторую группу индексов:

$$\alpha_{12} = 1, \quad \alpha_{22} = \alpha_{Q+1,1}, \ldots, \alpha_{k2} = \alpha_{(k-1)Q+1,1}, \ldots, \alpha_{q_2 2} = n. \tag{6}$$

Если зафиксировать как-либо величины $X_{\alpha_{k2}}$ ($k = 1, 2, \ldots, q_2$), то назовем такое событие Λ_2 с вероятностью P_{Λ_2}. Продолжая этот процесс далее, из сечения Λ_p с индексами $\alpha_{1p} = 1$, $\alpha_{2p}, \ldots, \alpha_{kp}, \ldots, \alpha_{q_p p} = n$ получаем новое сечение с помощью индексов:

$$\alpha_{1,p+1} = 1, \quad \alpha_{2,p+1} = \alpha_{Q+1,p}, \ldots, \alpha_{k,p+1} = \alpha_{(k-1)Q+1,p}, \ldots, \alpha_{q_{p+1}, p+1} = n,$$

которое обозначаем Λ_{p+1} — событие с вероятностью $P_{\Lambda_{p+1}}$. Так продолжаем, пока не дойдем до последнего сечения Λ_s, имеющего всего два индекса: $\alpha_{1s} = 1$ и $\alpha_{2s} = n$.

Рассмотрим теперь нашу цепь $X_1, X_2, \ldots, X_n$, откуда выброшены элементы $X_{\alpha_{11}}, X_{\alpha_{21}}, \ldots, X_{\alpha_{q_1 1}}$. Получится новая цепь Маркова

$$X_2, \ldots, X_{\alpha_{21}-1}, X_{\alpha_{21}+1}, \ldots, X_{\alpha_{k1}-1}, X_{\alpha_{k1}+1}, \ldots, X_{n-1}, \tag{7}$$

и сумму ее элементов обозначим Z_n. Обозначим далее $S_{\Lambda_1} = Z_n \mid \Lambda_1$, т. е. ту случайную величину, в которую превращается Z_n при фиксированном сечении Λ_1, „индуцирующем" на цепь (7) соответствующие условные законы распределения.

Весьма существенно заметить, что на основании определения простой цепи Маркова S_{Λ_1} есть сумма независимых случайных величин.

Далее, обозначим через $A_1(\Lambda_1)$ условное математическое ожидание $E_{\Lambda_1}(S_{\Lambda_1})$. В то время как $E(Z_n) = 0$, $A_1(\Lambda_1) = E_{\Lambda_1}(S_{\Lambda_1}) \neq 0$, вообще говоря.

Теперь будем считать Λ_1 случайным событием, тогда $A_1(\Lambda_1)$ будет тоже суммой случайных величин, но не независимых, а связанных способом, весьма напоминающим цепь Маркова. Аналогично вводится условная дисперсия $D_{\Lambda_1}(S_{\Lambda_1})$ и вообще любые условные моменты.

Фиксируем сечение Λ_2 и обозначим $S_{\Lambda_2}=A_1(\Lambda_1)\,|\,\Lambda_2$; тогда S_{Λ_2} снова есть сумма независимых величин, и мы рассматриваем снова $E_{\Lambda_2}(S_{\Lambda_2})=A_2(\Lambda_2)$ и $D_{\Lambda_2}(S_{\Lambda_2})$. Если будем считать Λ_2 случайным событием, то, фиксируя Λ_3, продолжаем процесс далее. Таким образом определим случайные величины S_{Λ_p}, $A_p(\Lambda_p), D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})$ и третий и четвертый условные центральные моменты $\mu^{(3)}_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})$ и $\mu^{(4)}_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})$ $(p=1, 2, \ldots, s)$. При этом всегда $E(A_p(\Lambda_p))=0$.

После этого элементарные рассуждения приводят к следующей формуле для дисперсии суммы Z_n элементов цепи Маркова

$$D(Z_n)=\sum_{\Lambda_1} P_{\Lambda_1}D_{\Lambda_1}(S_{\Lambda_1})+\sum_{\Lambda_2} P_{\Lambda_2}D_{\Lambda_2}(S_{\Lambda_2})+\ldots+\sum_{\Lambda_s} P_{\Lambda_s}D_{\Lambda_s}(S_{\Lambda_s})+$$
$$+D(A_s(\Lambda_s)), \tag{8}$$

которая, в частности, удобна тем, что так как S_{Λ_p} $(p\leqslant s)$ есть сумма независимых случайных величин, то $D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})$ распадается на сумму удобно обозримых слагаемых.

Далее заметим, что

$$\sum_{\Lambda_p} P_{\Lambda_p}D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})=E(D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})).$$

Аналогично выражается и четвертый момент. Укажем, в частности, выражение

$$\mu_0^{(4)}=\mu^{(4)}(Z_n)=E(Z_n^4)=$$
$$=\sum_{\Lambda_1} P_{\Lambda_1}\mu^{(4)}_{\Lambda_1}(S_{\Lambda_1})+4\sum_{\Lambda_1} P_{\Lambda_1}\mu^{(3)}_{\Lambda_1}(S_{\Lambda_1})\,A_1(\Lambda_1)+6\sum_{\Lambda_1} P_{\Lambda_1}D_{\Lambda_1}(S_{\Lambda_1})\,(A_1(\Lambda_1))^2+$$
$$+\sum_{\Lambda_1} P_{\Lambda_1}(A_1(\Lambda_1))^4$$

и общее неравенство:

$$\mu_p^{(4)}=\sum_{\Lambda_p} P_{\Lambda_p}[A_p(\Lambda_p)]^4\leqslant$$
$$\leqslant 3\sum_{\Lambda_{p+1}} P_{\Lambda_{p+1}}[D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})]^2+\sum_{\Lambda_{p+1}} P_{\Lambda_{p+1}}\mu^{(4)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})+$$
$$+4(\mu^{(4)}_{p+1})^{1/4}\left(\sum_{\Lambda_{p+1}} P_{\Lambda_{p+1}}\mu^{(4)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})\right)^{3/4}+4\mu^{(4)}_{p+1}, \tag{9}$$

где $\mu^{(4)}_{p+1}=\sum_{\Lambda_{p+1}} P_{\Lambda_{p+1}}(A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^4$, $p=0, 1, 2, \ldots, s-1$.

Заметим, что (8) и рекуррентное неравенство (9) были нами выведены для вспомогательной цепи (7), ибо это удобнее для доказательства теоремы. Но подобные же равенства и неравенства можно вывести и для основной цепи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и моментов любого порядка. Удобство (8) и (9) в том, что суммы S_{Λ_p} суть суммы независимых случайных величин, для которых расчет моментов сравнительно прост.

Выбирая соответствующим образом числа M и Q и комбинируя (8) и (9) и их следствия с методом С. Н. Бернштейна, удается доказать сформулированную теорему после некоторых вспомогательных вычислений.

Автор считает долгом выразить признательность акад. С. Н. Бернштейну и Н. А. Сапогову за любезную помощь и ценные указания.

Поступило
4 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, Зап. Импер. Акад. Наук,сер. 8, **25**, № 3 (1904). [2] S. Bernstein, Math. Ann., **97**, 1 (1927). [3] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, VI сер., 15—17 (1926). [4] С. Н. Бернштейн, ДАН, 55 (1928). [5] С. Н. Бернштейн, Матем. сб., **1** (43). № 1 (1936). [6] Н. А. Сапогов, ДАН, **58**, № 2 (1947). [7] Н. А. Сапогов, ДАН, **58**, № 9 (1948).