Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 1

МАТЕМАТИКА

М. С. ЛИВШИЦ

К ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ НЕЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 II 1948)

1. В теории элементарных делителей для конечных матриц полностью выясняется структура системы инвариантных подпространств. В бесконечномерных пространствах аналогичная задача решена для эрмитовых операторов.

Однако об инвариантных подпространствах неэрмитовых операторов известно очень мало. Даже в простейшем случае вполне непрерывного оператора ничего не известно о его бесконечномерных инвариантных подпространствах. Отсутствуют также критерии полноты системы конечномерных инвариантных подпространств.

Как известно, линейный ограниченный оператор A называется эрмитовым, если $A = A^*$, где A^* — сопряженный оператор. Естественно начинать изучение инвариантных подпространств неэрмитовых операторов с того случая, когда разность между оператором и его сопряженным является конечномерным оператором, т. е. оператором, отображающим все гильбертово пространство в его конечномерную часть. Такой оператор мы называем квази-эрмитовым. Однако и в этом случае исследование инвариантных подпространств сопряжено с большими трудностями.

Выделим из спектра оператора все собственные числа λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда, как известно, существуют максимальные взаимно простые инвариантные подпространства H_k $(k = 1, 2, \ldots)$, в которых спектр оператора совпадает с λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

В соответствии с этим можно поставить следующие вопросы:

I. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы линейная замкнутая оболочка пространств H_k $(k = 1, 2, \ldots)$ совпадала со всем пространством H (условия полноты)?

II. Пусть $\tilde{H}$ — линейная замкнутая оболочка пространств H_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Существует ли инвариантное подпространство, которое в сумме с $\tilde{H}$ дает все пространство H?

III. Каковы инвариантные подпространства оператора, который не имеет ни одного собственного числа?

2. С помощью преобразования Кэли ([2]) вопрос об отыскании инвариантных подпространств квази-эрмитова оператора сводится к аналогичному вопросу для квази-унитарного оператора ([3]). Квази-унитарный оператор T называется нерастягивающим, если $(Tf, Tf) \leqslant (f, f)$ $(f \in H)$.

Нерастягивающий оператор называется простым, если он не является унитарным ни на каком подпространстве. Существенную роль для отыскания инвариантных подпространств нерастягивающего оператора играет детерминант его характеристической матрицы — функции $\Delta(\zeta)$ ($|\zeta|<1$) ([3]). Функцию $\Delta(\zeta)$ ($|\zeta|<1$) мы будем называть **главным инвариантом** оператора T. Можно доказать, что $\Delta(\zeta)$ — регулярная функция от ζ ($|\zeta|<1$), отображающая единичный круг на свою часть.

Теорема. *Если нерастягивающий оператор T имеет инвариантное подпространство H_1, то главный инвариант $\Delta_1(\zeta)$ в пространстве H_1 является делителем* главного инварианта $\Delta(\zeta)$.*

В следующей теореме содержится решение проблем I и II для нерастягивающего оператора.

Теорема. *Пусть T — нерастягивающий оператор. Тогда пространство H, в котором определен оператор T, можно представить в виде*

$$H = H^0 \oplus \overline{(H^{(1)} + H^{(2)})},$$

где $H^{(0)}$, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ — взаимно простые инвариантные пространства, характеризующиеся следующим образом:

1) в пространстве $H^{(0)}$ оператор T унитарен;

2) пространство $H^{(1)}$ является линейно замкнутой оболочкой конечномерных инвариантных подпространств;

3) в $H^{(2)}$ не существует конечномерных инвариантных подпространств.

Если

$$\Delta\zeta = \Delta_1(\zeta)\Delta_2(\zeta),$$

$$\Delta_1(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta_k - \zeta}{1-\zeta\overline{\zeta}_k}\,\frac{|\zeta_k|}{\zeta_k}\right)^{p^k} \quad (|\zeta_k|<1,\ k=1,2,\ldots),$$

$$\Delta_2(\zeta) = \exp\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\alpha}+\zeta}{e^{i\alpha}-\zeta}\,d\sigma(\alpha)$$

— известное представление аналитической функции $\Delta(\zeta)$ ($|\zeta|<1$), то $\Delta_1(\zeta)$, $\Delta_2(\zeta)$ — главные инварианты оператора T в подпространствах $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ соответственно.

Если весь спектр нерастягивающего оператора T сводится к одной точке $\zeta_0 = 1$, то главный инвариант $\Delta(\zeta) = e^{a\frac{\zeta+1}{\zeta-1}}$ ($a>0$).

Можно показать, что каждому делителю $e^{b\frac{\zeta+1}{\zeta-1}}$ ($0<b<a$) функции $\Delta(\zeta)$ отвечает инвариантное подпространство оператора T.

3. Пусть B — вполне непрерывный оператор. Представим оператор B в виде суммы „вещественной“ и „чисто мнимой“ частей:

$$B = A_1 + iA_2,$$

где A_1 и A_2 — эрмитовы операторы.

Теорема. *Если $\operatorname{Im} B = A_2$ — конечномерный, ненегативный оператор, то пространство H, в котором определен оператор B,*

* Т. е. отношение $\Delta(\zeta)/\Delta_1(\zeta)$ ($|\zeta|<1$) — регулярная функция, отображающая единичный круг на свою часть.

можно представить в виде замыкания суммы двух взаимно простых инвариантных подпространств:

$$H = \overline{H_1 + H_2}.$$

Подпространства H_1 и H_2 характеризуются следующим образом:

1) *пространство H_1 является линейной замкнутой оболочкой конечномерных инвариантных подпространств;*

2) *в H_2 нет конечномерных инвариантных подпространств. Вместо них в H_2 существует континуум инвариантных подпространств E_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, обладающих свойствами:*

$$\alpha)\ E_{t''} \supset E_{t'} \text{ при } t'' > t';$$

$$\beta)\ E_{t-0} = E_{t+0} = E_t;$$

$$\gamma)\ E_0 = (0),\ E_1 = H_2.$$

Каждый из двух крайних случаев, указанных в теореме, действительно осуществляется.

Пример. Пусть $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — система линейно независимых непрерывных функций. Рассмотрим интегральный оператор

$$Bf = \int_0^1 K(x, s) f(s) ds,$$

где $K(x, s)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant 1)$ — ядро вида

$$K(x, s) = \begin{cases} i \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)}, & s < x, \\ 0 & s \geqslant x. \end{cases}$$

Очевидно, $\frac{K - K^*}{2i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)}$ является конечномерным ненегативным ядром. Оператор B не имеет ни одного конечномерного инвариантного подпространства.

Но оператор B имеет континуум бесконечномерных инвариантных подпространств E_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. E_t состоит из всех функций $f(x)$ $(f(x) \in L_2)$, аннулирующихся на интервале $(0, t)$.

Применяя условия полноты, дающие решение проблемы I, можно установить следующую теорему:

Теорема. *Пусть $L(y) = \sum_{k=0}^{m} P_{m-k}(x) y^k$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ — самосопряженное дифференциальное выражение, в котором все коэффициенты непрерывны и $P_0(x) \neq 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.*

Пусть $u_i(y) = 0$ неособенная система граничных условий такая, что для любой функции y, удовлетворяющей условиям $u_i(y) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, имеет место неравенство

$$\operatorname{Im} \int_a^b L(y) \overline{y} dx \geqslant 0. \tag{1}$$

При этих условиях линейная замкнутая оболочка конечномерных инвариантных подпространств дифференциального оператора $L(y)$ при граничных условиях $u_i(y)=0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ совпадает со всем пространством $L_2(a,b)$.

Условие (1) существенно. Действительно, если условия $u_i(y)=0$ являются, например, условиями Коши, т. е.

$$u_i(y)=y^{(i-1)}(a) \quad (i=1,2,\ldots,m),$$

то оператор $L(y)$ при этих условиях не имеет ни одного конечномерного инвариантного подпространства.

В заключение отметим, что нам не удалось получить удовлетворительных результатов в том случае, когда „мнимая часть" A_2 в разложении $B=A_1+iA_2$ является индефинитным оператором.

Поступило
8 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, 1913. [2] J. v. Neumann, Math. Ann., **102** (1929). [3] М. С. Лившиц, ДАН, **58**, № 1 (1947).