Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 1

МАТЕМАТИКА

С. Г. КРЕЙН и Б. Я. ЛЕВИН

О СХОДИМОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 I 1948)

Под сингулярным интегралом обычно понимают интеграл вида $\int_a^b \varphi_n(x,t) f(t)\, dt$, в котором последовательность ядер $\varphi_n(x,t)$ обладает свойством $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n(x,t)\, dt = 1$ при $a \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant b$.

Основной проблемой теории сингулярных интегралов является отыскание условий того, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x,t) f(t)\, dt = f(x) \tag{1}$$

для всех функций $f(x)$ определенного класса в точках заданного типа.

В классическом мемуаре Лебега ([1]) исследовались условия представимости сингулярным интегралом функций пяти классов; 1) в точках их непрерывности; 2) в точках, где функция $f(x)$ является производной от своего неопределенного интеграла, т. е.

$$f(x) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \int_x^{x+\tau} f(t)\, dt, \tag{2}$$

и 3) в точках, называемых теперь точками Лебега, в которых

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \int_x^{x+\tau} |f(t) - f(x)|\, dt = 0.$$

Ряд важных результатов получен в этом направлении другими авторами.

В настоящей заметке мы решаем более общую проблему о сравнении двух последовательностей (или семейств) ядер. Точнее, для различных классов функций $f(x)$ мы устанавливаем необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность ядер $\varphi_n(x,t)$, чтобы она представляла функции $f(x)$ равенством (1) во всех точках, в которых

$$f(x) = \lim_{\tau\to 0} \int_a^b \theta_\tau(x,t) f(t)\, dt, \tag{3}$$

где $\theta_\tau(x,t)$ — заданное семейство ядер, зависящее от параметра τ.

Наши рассуждения имеют общий характер, поэтому мы формулируем результаты и приводим схему доказательств в общих понятиях банаховых пространств. В качестве одного из приложений мы даем необходимые и достаточные условия представимости сингулярным интегралом любой функции класса L^p $(p \geqslant 1)$ в точках, где она является производной своего неопределенного интеграла, содержащие в себе как частный случай некоторые достаточные условия, указанные для класса L^1 Лебегом (1) и П. И. Романовским (2).

1. Мы будем рассматривать банахово пространство E, в котором задано семейство ограниченных линейных операторов P_ε $(0 < \varepsilon \leqslant 1)$, обладающее свойствами: 1) оператор P_ε отображает пространство E на замкнутое подпространство E_ε; 2) $\| P_\varepsilon f \| \leqslant \| f \|$ и 3) $f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon f$ при любом $f \in E$. Обозначим $f_\varepsilon = P_\varepsilon f$.

Определение 1. Однопараметрическое семейство линейных функционалов $\theta_\tau(f)$ на пространстве E, слабо непрерывное по параметру τ на полуинтервале $0 < \tau \leqslant 1$, назовем *сингулярным относительно семейства операторов* P_ε, если выполнено условие

$$S_1) \qquad \lim_{\tau \to 0} \theta_\tau (P_\varepsilon f) = 0 \text{ при любом } f \in E \text{ и } \varepsilon > 0,$$

и *правильно сингулярным относительно семейства* P_ε, если, кроме того, для каждого элемента $f \in E$ существует константа K_f такая, что при всяком $\tau_0 > 0$

$$S_2) \qquad \sup_{0 < \tau \leqslant \tau_0} | \theta_\tau (f_\varepsilon) | \leqslant K_f \sup_{0 < \tau \leqslant \tau_0} | \theta_\tau (f) |$$

для всех положительных ε, меньших $\varepsilon(\tau_0) > 0$.

В этой заметке мы рассматриваем правильно сингулярные семейства линейных функционалов.

Обозначим через H линейное подмножество пространства E, состоящее из тех элементов $h \in E$, для которых $\lim\limits_{\tau \to 0} \theta_\tau (h) = 0$. Очевидно, из условия сингулярности следует $E_\varepsilon \subset H$ при всяком $\varepsilon > 0$.

Определение 2. Аддитивный однородный функционал $\varphi(h)$, определенный на множестве H, назовем *допустимым*, если он удовлетворяет двум условиям: 1) $\varphi(h)$ является ограниченным функционалом на каждом подпространстве E_ε, т. е. $| \varphi (h_\varepsilon) | \leqslant C_\varepsilon \| h_\varepsilon \|$; 2) $\varphi(h) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi(h_\varepsilon)$ $(h \in H)$.

Постановка задачи. Требуется найти необходимые и достаточные условия того, чтобы последовательность допустимых функционалов $\varphi_n(h)$ слабо сходилась к нулю на множестве H, т. е. чтобы из

$$\lim_{\tau \to 0} \theta_\tau (h) = 0$$

следовало

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n (h) = 0. \tag{4}$$

Для того чтобы решить поставленную задачу, мы введем в линейное множество H новую норму соотношением $\| h \|_H = \| h \| + \max | \theta_\tau (h) |$.

Нетрудно показать, что при этой норме H будет полным нормированным пространством. Укажем два важных для нас в дальнейшем свойства новой нормы, непосредственно вытекающие из условий сингулярности S_1 и S_2.

1°. В каждом подпространстве E_ε нормы пространства H и пространства E эквивалентны.

2°. Сумма подпространств E_ε плотна в H; более того, $\| h - h_\varepsilon \|_H \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Лемма 1. *Всякий допустимый функционал на H является ограниченным по норме в H, и наоборот: всякий ограниченный функционал является допустимым.*

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность допустимых функционалов $\varphi_n(h)$ слабо сходилась к нулю на H, т. е. удовлетворяла бы условию* (4), *необходимо и достаточно, чтобы:* a) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(h_\varepsilon) = 0$ *при любом $h \in H$ и $\varepsilon > 0$;* b) $\varphi_n(h)$ *являлись линейными (непрерывными) функционалами на пространстве H,* c) $\varphi_n(h)$ *равномерно ограничены по норме, т. е. $\| \varphi_n \| \leqslant M$ при $n = 1, 2, \ldots$*

Доказательство необходимости. Необходимость условия a) очевидна. Необходимость условия b) следует из леммы и c) — из теоремы Лебега — Банаха об ограниченности слабо сходящейся последовательности линейных функционалов.

Доказательство достаточности. Согласно 2° множество элементов h_ε плотно в H, поэтому из сходимости к нулю ограниченной последовательности линейных функционалов на этом множестве следует ее сходимость к нулю на всем пространстве. Теорема доказана.

2. Теорема 2. *Всякий линейный функционал на H представим в виде:*

$$\varphi(h) = \chi(h) + \int_0^1 \theta_\tau(h)\, d\sigma(\tau), \tag{5}$$

где $\chi(h)$ — линейный функционал на E, а $\sigma(\tau)$ — функция ограниченной вариации. Наоборот, функционал вида (5) *является линейным на H функционалом с нормой $\| \varphi \| = \min\, (\max\, (\| \chi \|, \operatorname{var} \sigma))$, где minimum берется по всевозможным представлениям $\varphi(h)$ в виде* (5).

Укажем идею доказательства. Рассматривается прямое произведение $E \times C$ пространства E на пространство непрерывных функций $u(\tau)$ на сегменте $[0, 1]$ с нормой $\| (f, u) \| = \| f \| + \max\limits_\tau | u(\tau) |$. Пространство H отображается изометрично на $E \times C$ соотношением $h \longleftrightarrow (h, u_h(\tau))$, где $u_h(\tau) = \theta_\tau(h)$ $(u_h(0) = 0)$. Каждый линейный функционал на H по теореме Гана — Банаха может быть расширен с сохранением нормы на все пространство $E \times C$. На этом пространстве общий вид функционала дается формулой (5), и норма его равна $\max(\| \chi \|, \operatorname{var} \sigma)$.

3. Проиллюстрируем наши результаты на конкретных примерах. Пусть E есть L^p $(p \geqslant 1)$ на сегменте $[a, b]$. Определяем операцию P_ε:

$$P_\varepsilon f(t) = \begin{cases} 0 \text{ на интервале } |t - x| < \varepsilon, \\ f(t) \text{ при } |t - x| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Функционалы $\theta_\tau(f)$, определенные так: $\theta_\tau(f) = \frac{1}{\tau} \int\limits_x^{x+\tau} f(t)\, dt$, образуют правильно сингулярное семейство.

Назовем функцию $\varphi(t)$ допустимой, если интеграл $\int\limits_a^b \varphi(t) f(t) dt$ существует при всякой функции $f(t) \in L^p$, являющейся в точке $t = x$ производной от своего неопределенного интеграла $(\lim\limits_{\tau \to 0} \theta_\tau(f) = f(x))$.

Лемма 2. *Функция $\varphi(t)$ допустима тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$\varphi(t)=\chi(t)+\psi(t), \tag{6}$$

где $\chi(t)\in L^q$ $(q=p/(p-1))$, а $\psi(t)$ имеет ограниченную вариацию вне каждого сегмента $[x-\varepsilon,\ x+\varepsilon]$ и

$$V[\psi]=\int_a^x \operatorname*{var}_{0<t<u} \psi(t)\,du+\int_x^b \operatorname*{var}_{u\leqslant t\leqslant b} \psi(t)\,du$$

существует.

Обозначим $\|\varphi\|=\min(\max(\|\chi\|_{L^q},\ V[\psi]))$, где minimum берется по всем представлениям функции $\varphi(t)$ в форме (6).

Теорема 3. *Для того чтобы последовательность допустимых ядер $\varphi_n(x,t)$ представляла любую функцию $f(t)\in L^p$ формулой*

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x,t)\,f(t)\,dt$$

в точках $t=x$, где $f(t)$ является производной своего неопределенного интеграла, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta \varphi_n(x,t)\,dt=1$ *при* $a\leqslant\alpha<x<\beta\leqslant b$; 2) $\|\varphi_n(x,t)\|\leqslant M(x)$,

где $M(x)$ не зависит от n.

Аналогичные результаты верны в пространстве V функций ограниченной вариации $\sigma(t)$. Мы назовем там функцию $\varphi(t)$ допустимой, если существует интеграл $\int_a^b \varphi(t)\,d\sigma(t)$ при всякой функции $\sigma(t)$ ограниченной вариации на $[a,b]$, дифференцируемой в точке $t=x$.

Лемма 3. *Функция $\varphi(t)$ допустима тогда и только тогда, когда она представима в виде (6), где $\chi(t)$ — измеримая по Борелю ограниченная функция, а $\psi(t)$ имеет тот же смысл, что и в лемме 2.*

Обозначая $\|\chi(t)\|=\sup|\chi(t)|$ и нормы $\varphi(t)$ как выше, имеем

Теорема 4. *Для того чтобы для допустимых ядер $\varphi_n(x,t)$ было справедливо равенство*

$$\sigma'(x)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x,t)\,d\sigma(t)$$

при всякой функции $\sigma(t)$ ограниченной вариации и дифференцируемой в точке $t=x$, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x,t)\,dt=1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x,t)=0$ *при всех* $t\neq x$ $(t\in[a,b])$;

3) $\|\varphi_n(x,t)\|\leqslant M(x)$, *где $M(x)$ не зависит от n.*

Другие приложения наших теорем мы намерены привести в более подробной статье.

Поступило
28 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Lebesgue, Ann. de Toulouse, sér. 3, 1, 25 (1909). [2] P. Romanowski, Math. Z., 34, H. 1 (1931).