Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 1

МАТЕМАТИКА

С. З. БРУК

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 I 1948)

Обобщая определение параболичности И. Г. Петровского ([1]), мы будем называть систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j;\, k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{k_1 \ldots k_n}(t; x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^{\Sigma k_\nu} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = 0 \qquad (1)$$

$$\left(i, j = 1, 2, \ldots, N;\ \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu = M \right)$$

параболической в полосе $t_0 \leqslant t \leqslant T$, если характеристические корни λ-матрицы

$$\lambda E - \left\| \sum_{k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{k_1 \ldots k_n}(t; x_1, \ldots, x_n)\, (i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} \right\|$$

удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n;\ t;\ x_1, \ldots, x_n) < -\delta < 0$$

для всех $t; x_1, \ldots, x_n$ в полосе $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и всех вещественных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, сумма квадратов которых равна единице, где δ постоянное.

Предполагая, что коэффициенты $A_{ij}^{k_1 \ldots k_n}(t; x)$ непрерывны и ограничены в полосе $t_0 \leqslant t \leqslant T$ вместе со своими производными по $x_1, \ldots, x_n$ до M-го порядка, мы построим фундаментальные решения

$$Z_i^s(t; \tau; x; \xi) \qquad (i, s = 1, \ldots, N)$$

системы (1), т. е. такие решения, при помощи которых решение задачи Коши в полосе $t_0 \leqslant t \leqslant T$ выражается через начальные данные

$$u_i(t; x_1, \ldots, x_n)\big|_{t=t_0} = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (2)$$

по формулам

$$u_i(t; x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_s Z_i^s(t; t_0; x; \xi)\, f_s(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n. \qquad (3)$$

При этом мы будем следовать методу Леви [2].

Заменим переменные $x_1, \ldots, x_n$, стоящие под знаком $A_{ij}^{(k)}(t; x)$, параметрами $y_1, \ldots, y_n$. Тогда получим систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j, k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{k_1 \ldots k_n}(t; y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = 0 \tag{4}$$

с коэффициентами, зависящими только от t.

Фундаментальные решения системы (4), как известно [1], имеют вид

$$u_i^s(t; t-\tau; y; x-\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_i^s(t; t-\tau; y; \alpha)\, e^{i\Sigma\alpha_\nu (x_\nu - \xi_\nu)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \tag{5}$$

где $v_i^s(t; t-\tau; y; \alpha)$ в полосе $\tau < t \leqslant T$ удовлетворяют системе обыкновенных уравнений

$$\frac{\partial v_i^s}{\partial t} = \sum_{j, k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{k_1 \ldots k_n}(t; y_1, \ldots, y_n)(i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} v_j^s, \tag{6}$$

а при $t = \tau$ — условиям

$$v_i^s \Big|_{t=\tau} = \delta_i^s.$$

Будем искать фундаментальные решения Z_i^s первоначальной системы (1) в виде

$$Z_j^s(t; \tau; x; \xi) = u_j^s(t; t-\tau; x; x-\xi) +$$
$$+ \int_\tau^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_r u_j^r(t; t-t'; x; x-x')\, \varphi_r^s(t', \tau; x'; \xi)\, dx'_1 \ldots dx'_n$$
$$(j, s, r = 1, \ldots, N), \tag{7}$$

где $\varphi_r^s(t'; \tau; x'; \xi)$ — пока неопределенные функции.

Лемма 1. *Обозначим через $K_i^s(t; \tau; x; \xi)$ результат подстановки $u_j^s(t; t-\tau; x; x-\xi)$ в систему* (1), *т. е.*

$$K_i^s(t; \tau; x; \xi) = \frac{\partial u_i^s(t; t-\tau; x; x-\xi)}{\partial t} -$$
$$- \sum_{j, k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{k_1 \ldots k_n}(t; x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^M u_j^s(t; t-\tau; x; x-\xi)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Функции $K_i^s(t; \tau; x; \xi)$ обладают следующими свойствами:

1) *$K_i^s(t; \tau; x; \xi)$ непрерывны в каждой точке $(t, x) \neq (\tau, \xi)$.*

2) *Вне окрестности $Q(\tau, \xi)$ точки (τ, ξ)*

$$|K_i^s(t; \tau; x; \xi)| < C_\gamma (t-\tau)^\gamma \tag{8}$$

(где C_γ — постоянное и γ достаточно велико).

3) *Во всем пространстве* t, x

$$|K_i^s(t;\tau;x;\xi)| < \frac{C}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha}{M}} r(x-\xi)^{n-1+\alpha}} \tag{9}$$

$\left(\text{где } C \text{ — постоянное; } \alpha,\ 0<\alpha<1, \text{— произвольное и } r(y) = \sqrt{\sum_{\nu}^{n} y_\nu^2}\right).$

Лемма 2. *Пусть* $\psi_i^s(t;\tau;x;\xi)$ *обладают следующими свойствами:*

1) $\psi_i^s(t;\tau;x;\xi)$ *непрерывны в каждой точке* $t, x \neq \tau, \xi$.

2) *Вне окрестности* $Q(\tau,\xi)$ *точки* (τ,ξ) $\psi_i^s(t;\tau;x;\xi)$ *ограничено.*

3) *Внутри окрестности* $Q(\tau,\xi)$

$$|\psi_i^s(t;\tau;x;\xi)| < \frac{B}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha}{M}} r(x-\xi)^{n-1+\alpha}} \tag{10}$$

(*где* $M>0$ *задано*; $\alpha,\ 0<\alpha<1$,— *произвольное число и* B *постоянное*).

Тогда для точки $(t,x) \neq (\tau,\xi)$

$$\lim_{t'\to t} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_r u_i^r(t;t-t';x;x-x')\,\psi_r^s(t';\tau;x';\xi)\,dx_1'\ldots dx_n' = \psi_i^s(t;\tau;x;\xi). \tag{11}$$

Допустим теперь, что искомые фундаментальные решения $Z_i^s(t;\tau;x;\xi)$ системы (1) действительно могут быть представлены в виде (7), притом с функциями $\varphi_r^s(t;x;\tau;\xi)$, удовлетворяющими условиям леммы 2.

Тогда в силу лемм 1, 2 следует, что $\varphi_r^s(t;\tau;x;\xi)$ необходимо удовлетворяют следующему соотношению

$$K_i^s(t;\tau;x;\xi) + \varphi_i^s(t;\tau;x;\xi) + \int_{\tau}^{t} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_r K_i^r(t;t';x;x')\,\varphi_r^s(t';\tau;x';\xi)\,dx_1'\ldots dx_n' = 0. \tag{12}$$

Это система интегральных уравнений типа Вольтерра. Решая ее методом последовательных приближений, можно показать, что:

Лемма 3. *Существует решение* $\varphi_i^r(t;\tau;x;\xi)$ *системы* (12), *удовлетворяющее условиям* 1), 2) *и* 3) *леммы* 2.

Подстановкой решений $\varphi_i^r(t;\tau;x;\xi)$ системы (12) в формулы (7) мы получим решения $Z_i^s(t;\tau;x;\xi)$ системы (1).

Пусть $f_s(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольные непрерывные и ограниченные функции. Составим выражение

$$u_i(t;x_1,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_s Z_i^s(t;t_0;x;\xi)\,f_s(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,d\xi_1\ldots d\xi_n. \tag{13}$$

Очевидно, что $u_i(t;x_1,\ldots,x_n)$, доставляемые формулой (7), являются решением системы (1) в полосе $t_0 \leqslant t \leqslant T$, поскольку $Z_i^s(t;t_0;x;\xi)$ является таким решением.

Покажем, что это решение $u_i(t; x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет начальным данным

$$u_i(t; x_1, \ldots, x_n)|_{t=t_0} = f_i(x_1, \ldots, x_n); \tag{14}$$

тем самым будет доказано, что доставляемые формулой (7) решения $Z_i^s(t; \tau; x; \xi)$ являются фундаментальными решениями.

Лемма 4. *Для функций*

$$w_i^s(t; t_0; x; \xi) = \int_{t_0}^{t} dt' \int \sum_r u_i^r(t; t - t_0; x; x - \xi)\, \varphi_r^s(t'; t_0; x'; \xi)\, dx_1' \ldots dx_n'$$

справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{t \to t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_s w_i^s(t; t_0; x; \xi)\, f_s(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n = 0. \tag{15}$$

В силу (11) и (15) следует (14), что и требовалось доказать.

Поступило
28 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, Математика и механика, 1, в. 7 (1937/38).
[2] Е. Е. Леви, Усп. матем. наук, в. 8 (1941).